CONCURSO VESTIBULAR PUC-RIO 2027
2º DIA - TARDE
GABARITO
GRUPO 3

PROVAS OBJETIVAS DE CIÊNCIAS DA NATUREZA E DE CIÊNCIAS HUMANAS
PROVA DISCURSIVA DE MATEMÁTICA

15 DE OUTUBRO DE 2026

CLASSIFICAÇÃO PERIÓDICA DOS ELEMENTOS

Com massas atômicas referidas ao isótopo 12 do carbono

	1 IA	2 IIA	3 IIIB	4 IVB	5 VB	6 VIB	7 VIIB	8 VIII	9 VIII	10 VIII	11 IB	12 IIB	13 IIIA	14 IVA	15 VA	16 VIA	17 VIIA	18 VIIIA
1	1 HIDROGÊNIO H 1,0079																	2 HÉLIO He 4,0026
2	3 LÍTIO Li 6,941(2)	4 BERÍLIO Be 9,0122											5 BORO B 10,811(5)	6 CARBONO C 12,011	7 NITROGÊNIO N 14,007	8 OXIGÊNIO O 15,999	9 FLÚOR F 18,998	10 NEÔNIO Ne 20,180
3	11 SÓDIO Na 22,990	12 MAGNÉSIO Mg 24,305											13 ALUMÍNIO Al 26,982	14 SILÍCIO Si 28,086	15 FÓSFORO P 30,974	16 ENXOFRE S 32,066(6)	17 CLORO Cl 35,453	18 ARGÔNIO Ar 39,948
4	19 POTÁSSIO K 39,098	20 CÁLCIO Ca 40,078(4)	21 ESCÂNDIO Sc 44,956	22 TITÂNIO Ti 47,867	23 VANÁDIO V 50,942	24 CRÔMIO Cr 51,996	25 MANGANÊS Mn 54,938	26 FERRO Fe 55,845(2)	27 COBALTO Co 58,933	28 NÍQUEL Ni 58,693	29 COBRE Cu 63,546(3)	30 ZINCO Zn 65,39(2)	31 GÁLIO Ga 69,723	32 GERMÂNIO Ge 72,61(2)	33 ARSÊNIO As 74,922	34 SELÊNIO Se 78,96(3)	35 BROMO Br 79,904	36 CRIPTÔNIO Kr 83,80
5	37 RUBÍDIO Rb 85,468	38 ESTRÔNCIO Sr 87,62	39 ÍTRIO Y 88,906	40 ZIRCÔNIO Zr 91,224(2)	41 NIÓBIO Nb 92,906	42 MOLIBDÊNIO Mo 95,94	43 TECNÉCIO Tc 98,906	44 RUTÊNIO Ru 101,07(2)	45 RÓDIO Rh 102,91	46 PALÁDIO Pd 106,42	47 PRATA Ag 107,87	48 CÁDMIO Cd 112,41	49 ÍNDIO In 114,82	50 ESTANHO Sn 118,71	51 ANTIMÔNIO Sb 121,76	52 TELÚRIO Te 127,60(3)	53 IODO I 126,90	54 XENÔNIO Xe 131,29(2)
6	55 CÉSIO Cs 132,91	56 BÁRIO Ba 137,33	57 a 71 La-Lu	72 HÁFNIO Hf 178,49(2)	73 TÂNTALO Ta 180,95	74 TUNGSTÊNIO W 183,84	75 RÊNIO Re 186,21	76 ÓSMIO Os 190,23(3)	77 IRÍDIO Ir 192,22	78 PLATINA Pt 195,08(3)	79 OURO Au 196,97	80 MERCÚRIO Hg 200,59(2)	81 TÁLIO Tl 204,38	82 CHUMBO Pb 207,2	83 BISMUTO Bi 208,98	84 POLÔNIO Po 209,98	85 ASTATO At 209,99	86 RADÔNIO Rn 222,02
7	87 FRÂNCIO Fr 223,02	88 RÁDIO Ra 226,03	89 a 103 Ac-Lr	104 RUTHERFÓRDIO Rf 261	105 DÚBNIO Db 262	106 SEABÓRGIO Sg	107 BÓHRIO Bh	108 HASSIO Hs	109 MEITNÉRIO Mt	110 UNUNILIO Uun	111 UNUNÚNIO Uuu	112 UNÚNBIO Uub						

Série dos Lantanídios

	57 LANTÂNIO La 138,91	58 CÉRIO Ce 140,12	59 PRASEODÍMIO Pr 140,91	60 NEODÍMIO Nd 144,24(3)	61 PROMÉCIO Pm 146,92	62 SAMÁRIO Sm 150,36(3)	63 EURÓPIO Eu 151,96	64 GADOLÍNIO Gd 157,25(3)	65 TÉRBIO Tb 158,93	66 DISPRÓSIO Dy 162,50(3)	67 HÓLMIO Ho 164,93	68 ÉRBIO Er 167,26(3)	69 TÚLIO Tm 168,93	70 ITÉRBIO Yb 173,04(3)	71 LUTÉCIO Lu 174,97
6															

Série dos Actinídios

	89 ACTÍNIO Ac 227,03	90 TÓRIO Th 232,04	91 PROTACTÍNIO Pa 231,04	92 URÂNIO U 238,03	93 NETÚNIO Np 237,05	94 PLUTÔNIO Pu 239,05	95 AMERÍCIO Am 241,06	96 CÚRIO Cm 244,06	97 BERQUÉLIO Bk 249,08	98 CALIFÓRNIO Cf 252,08	99 EINSTÊNIO Es 252,08	100 FÉRMIO Fm 257,10	101 MENDELÉVIO Md 258,10	102 NOBÉLIO No 259,10	103 LAURÊNCIO Lr 262,11
7															

NOME DO ELEMENTO
Número Atômico
Símbolo
Massa Atômica

Massa atômica relativa. A incerteza no último dígito é ± 1, exceto quando indicado entre parênteses.

CIÊNCIAS DA NATUREZA

1

O xilema é o tecido das plantas responsável por levar água e nutrientes das raízes até as folhas. Sob condições de seca severa, a falta de água no solo pode provocar entrada e expansão de bolhas de ar que bloqueiam o vaso condutor (embolia xilemática).

Nesse contexto, considere duas espécies vegetais em um ecossistema semiárido:

Espécie 1: possui poros bem pequenos e estreitos em seus vasos do xilema;

Espécie 2: possui poros grandes e largos nos vasos do xilema.

Diante de uma grande seca, o resultado esperado para essas plantas será a

(A) sobrevivência da Espécie 1, porque poros estreitos facilitam a entrada de bolhas do ar.
(B) morte rápida da Espécie 2, pois poros maiores facilitam a entrada de bolhas de ar.
(C) transformação dos vasos da Espécie 1 em folhas para armazenar gás carbônico.
(D) perda de todas as raízes na Espécie 2 para evitar que a planta absorva ar do solo.
(E) sobrevivência da Espécie 2, já que canais largos ajudam a eliminar o ar.

2

A abordagem baseada em Saúde Única (*One Health*) preconiza que a saúde humana, a saúde animal e a saúde ambiental estão intrinsecamente conectadas. Historicamente, a destruição de florestas nativas para a expansão da agropecuária reduz o hábitat de predadores de topo e força o deslocamento de morcegos e outros pequenos mamíferos. Esses animais, frequentemente hospedeiros de vírus selvagens, passam a habitar os limites das plantações e o entorno de habitações humanas, elevando a taxa de transbordamento zoonótico.

Com base na abordagem de Saúde Única, a medida preventiva mais eficaz contra o surgimento de novas epidemias de origem zoonótica é

(A) aplicar antivirais em larga escala nos recursos hídricos de florestas fragmentadas.
(B) substituir a criação de gado extensivo por monoculturas de grãos transgênicos de ciclo curto.
(C) incentivar a migração das populações rurais para metrópoles verticais altamente urbanizadas.
(D) promover o extermínio controlado de espécies de mamíferos silvestres suspeitas de portar vírus.
(E) conservar a integridade dos ecossistemas, mantendo as barreiras ecológicas entre vetores e populações humanas.

3

Estudos clínicos expandiram o entendimento sobre a homeostase metabólica ao caracterizarem o papel endócrino e bioenergético do tecido adiposo marrom. Ao contrário do tecido adiposo branco, especializado no armazenamento macromolecular de triacilgliceróis, o tecido marrom possui alta quantidade de mitocôndrias e atua de forma dissipativa, consumindo substratos lipídicos sob estimulação térmica ambiental fria.

A ativação biológica do tecido adiposo marrom em seres humanos expostos a ambientes frios confere uma vantagem adaptativa direta para a sobrevivência porque promove a(o)

(A) bloqueio do fluxo de oxigênio sistêmico para poupar os músculos esqueléticos.
(B) conversão de ácidos graxos livres em anticorpos circulantes na derme.
(C) manutenção da temperatura corporal por meio da liberação de energia como calor.
(D) mineralização acelerada da matriz óssea para evitar a fragilização dos ossos.
(E) resfriamento endotérmico do plasma sanguíneo em condições de calor extremo.

4

A biotecnologia moderna conta com técnicas avançadas de edição gênica, dentre as quais se destaca a de edição de bases (*base editing*). Diferentemente do sistema CRISPR, essa técnica realiza modificações químicas diretamente em nucleotídeos específicos sem romper a molécula. Uma das enzimas utilizadas nessa técnica converte a Citosina (C) em Uracila (U).

Nesse contexto, considerando-se os mecanismos normais de replicação e reparo celular, após um ciclo completo de duplicação do DNA, essa Uracila (U) induzirá a conversão do par de bases original C-G no seguinte par de bases:

(A) A-U (B) C-T (C) G-C (D) G-U (E) T-A

5

O modelo tradicional de engenharia civil urbana foca no escoamento rápido da água da chuva por meio de canalizações, o que frequentemente transfere o problema das enchentes para jusante (áreas mais baixas da bacia). Em contrapartida, as Soluções Baseadas na Natureza (SBN), como os jardins de chuva, buscam imitar as funções do ecossistema original.

O principal mecanismo físico pelo qual um jardim de chuva reduz o pico de vazão nas galerias urbanas, logo após uma tempestade, é a

(A) retenção temporária e facilitação da infiltração da água no solo poroso.
(B) canalização subterrânea da água diretamente para o oceano profundo.
(C) aceleração do fluxo superficial da água para que ela chegue mais rápido aos rios.
(D) evapotranspiração imediata de toda a água precipitada pelas folhas das árvores.
(E) impermeabilização do fundo da bacia para evitar que a água atinja o lençol freático.

6

Pesquisas ecológicas indicam que grandes cetáceos, tubarões e aves marinhas piscívoras apresentam concentrações de Poluentes Orgânicos Persistentes (POPs) milhares de vezes superiores às encontradas na água do mar ao seu redor. Esse fenômeno, além de afetar a saúde dos ecossistemas, representa um risco direto para populações humanas que baseiam sua dieta em peixes de grande porte.

As altas taxas de toxicidade, observadas especificamente nos predadores de topo, ocorrem porque esses organismos

(A) ingerem uma biomassa carregada de poluentes, que foi concentrada por todos os níveis tróficos anteriores.
(B) absorvem o plástico diretamente da água por osmose, através de suas superfícies corporais impermeáveis.
(C) possuem taxas metabólicas muito mais baixas, o que impede a quebra de polímeros naturais.
(D) recebem a carga poluidora sem nenhuma diluição prévia, pois ocupam o primeiro nível trófico.
(E) convertem os POPs em compostos voláteis, cujos danos limitam-se ao seu sistema respiratório.

7

A paleogenômica revelou que populações humanas modernas de ancestralidade não africana apresentam fragmentos de DNA de origem neandertal. A ocorrência de cruzamentos produtivos entre essas duas populações indica que o processo de especiação não havia se completado totalmente quando elas se reencontraram na Eurásia.

De acordo com o conceito biológico de espécie, o principal fator que define a consolidação de duas espécies distintas é a ocorrência de

(A) isolamento reprodutivo
(B) mutação cromossômica
(C) competição por recursos
(D) deriva genética acentuada
(E) migração para novos hábitats

8

O acúmulo de embalagens plásticas feitas de PET (polietileno tereftalato) na natureza é um dos maiores desafios ecológicos contemporâneos, já que esse polímero sintético altamente estável pode resistir por centenas de anos à degradação natural. Recentemente, pesquisadores isolaram e modificaram geneticamente uma enzima bacteriana chamada PETase. Essa enzima atua como um biocatalisador acelerado, quebrando as ligações químicas que unem os blocos fundamentais do plástico. Em usinas de reciclagem, a utilização dessa tecnologia permite decompor garrafas PET em poucas horas, transformando o lixo em moléculas simples que a indústria pode purificar e reutilizar.

A principal vantagem ecológica do uso dessa tecnologia bioenzimática no gerenciamento de resíduos sólidos consiste em

(A) incentivar o consumo consciente ao baratear o custo final de produção das embalagens plásticas.
(B) eliminar a necessidade de coleta seletiva por triagem mecânica e lavagem prévia nos lixões urbanos.
(C) viabilizar a economia circular por meio da reciclagem biológica com reaproveitamento total da matéria-prima.
(D) transformar o plástico descartado em adubo orgânico nutritivo para plantações de alimentos.
(E) fazer o plástico desaparecer por completo do planeta sem deixar nenhum tipo de resíduo físico.

9

Três bolas idênticas de 150 g cada são colocadas e mantidas em diferentes posições de uma mesa de sinuca horizontal, configurando um triângulo. Na mesa, estabelece-se um sistema de coordenadas cartesianas, com origem no canto inferior esquerdo. As bolas estão posicionadas nos pontos A (0,0), B (60,0) e C (30,60), em centímetros.

A coordenada x, em cm, do centro de massa é

(A) 10
(B) 20
(C) 30
(D) 40
(E) 50

10

O Número de Reynolds, representado por (Re), é utilizado para determinar o tipo de escoamento de um fluido dentro de um tubo. Ele pode ser calculado pela expressão $Re = \rho vD/\mu$, em que ρ é densidade do fluido (em kg/m^3), v é a velocidade média do fluido (em m/s), D é o diâmetro interno do tubo (em m) e μ é a viscosidade dinâmica (em kg/m·s).

O Número de Reynolds no Sistema Internacional de Unidades (SI) é

(A) medido em $m^2 \cdot s$
(B) medido em kg/s
(C) medido em kg/m
(D) medido em $kg/m \cdot s^3$
(E) adimensional

11

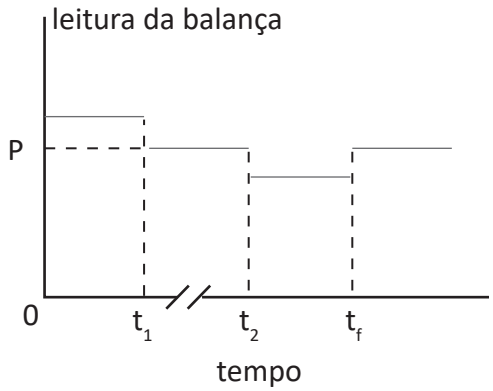
Uma carga elétrica pontual negativa Q está inicialmente em repouso no ponto (0, 0) de um sistema de eixos cartesianos. Uma carga pontual Q_1 está fixada sobre o eixo x em um ponto de coordenada x positiva. Uma carga Q_2, também pontual, está fixada sobre o eixo y em um ponto com coordenada y negativa. Suponha que a carga Q vai ser liberada, estando submetida apenas às forças elétricas devidas a Q_1 e Q_2.

Nesse cenário, o movimento inicial de Q ocorre em direção ao

(A) primeiro quadrante se Q_1 é positiva e Q_2 é negativa.
(B) primeiro quadrante se Q_1 é negativa e Q_2 é negativa.
(C) segundo quadrante se Q_1 é positiva e Q_2 é negativa.
(D) terceiro quadrante se Q_1 é positiva e Q_2 é positiva.
(E) terceiro quadrante se Q_1 é positiva e Q_2 é negativa.

12

Um jovem está sobre uma balança corretamente calibrada que se encontra sobre o piso de um elevador parado em um determinado andar de um prédio. Com o elevador parado e o jovem corretamente posicionado em repouso sobre a balança, a leitura da balança aponta o valor P. O jovem aperta o botão do elevador para um andar diferente, a porta do elevador se fecha e começa um trajeto. Durante o trajeto, desde sair do andar de partida até parar no andar de chegada, o jovem anota a leitura da balança e constrói o seguinte Gráfico:



No instante t = 0, o elevador sai do andar de partida.

Em $t = t_f$, o elevador para no andar de chegada e permanece nele.

No intervalo $0 < t < t_1$, a leitura da balança é maior que P.

No intervalo $t_1 < t < t_2$, a leitura da balança é igual a P.

No intervalo $t_2 < t < t_f$, a leitura da balança é menor que P.

A partir de $t = t_f$, a leitura da balança é igual a P.

No gráfico, o eixo horizontal tem um corte no segundo intervalo para denotar que esse trecho do trajeto levou mais tempo do que os outros dois.

Considerando-se os dados apresentados sobre o trajeto do elevador, verifica-se que

(A) a velocidade do elevador foi constante durante o tempo todo do trajeto ($0 < t < t_f$).
(B) o elevador, em nenhum intervalo de tempo, teve velocidade constante diferente de zero.
(C) o elevador foi para um andar abaixo do andar de partida.
(D) o elevador foi para um andar acima do andar de partida.
(E) não é possível determinar se o elevador foi para um andar acima ou para um andar abaixo do andar de partida.

13

Um refrigerador com certa potência calorífica leva um tempo Δt para solidificar totalmente uma massa m de água líquida inicialmente a 0 °C. A partir dessa informação, analise as afirmativas a seguir.

I – Um segundo refrigerador, com o dobro da potência daquele primeiro, levará o mesmo tempo Δt para solidificar totalmente uma massa m/2 de água líquida inicialmente a 0 °C.

II – Um segundo refrigerador, com o dobro da potência daquele primeiro, levará um tempo $2\Delta t$ para solidificar totalmente uma massa 2m de água líquida inicialmente a 0 °C.

III – Um segundo refrigerador, com o triplo da potência daquele primeiro, levará um tempo $2\Delta t$ para solidificar totalmente uma massa 6m de água líquida inicialmente a 0 °C.

É correto o que se afirma em

(A) II, apenas
(B) III, apenas
(C) I e III, apenas
(D) II e III, apenas
(E) I, II e III

14

Em um determinado experimento realizado em um laboratório de Óptica, um aluno utiliza um espelho esférico convexo que possui distância focal de 1,5 m. Um objeto é colocado em frente a esse espelho, a uma certa distância, e a imagem formada pelo espelho é observada a 75 cm atrás do espelho.

A distância, em m, do objeto ao espelho é de

(A) 0,5
(B) 1,0
(C) 1,5
(D) 2,0
(E) 2,5

15

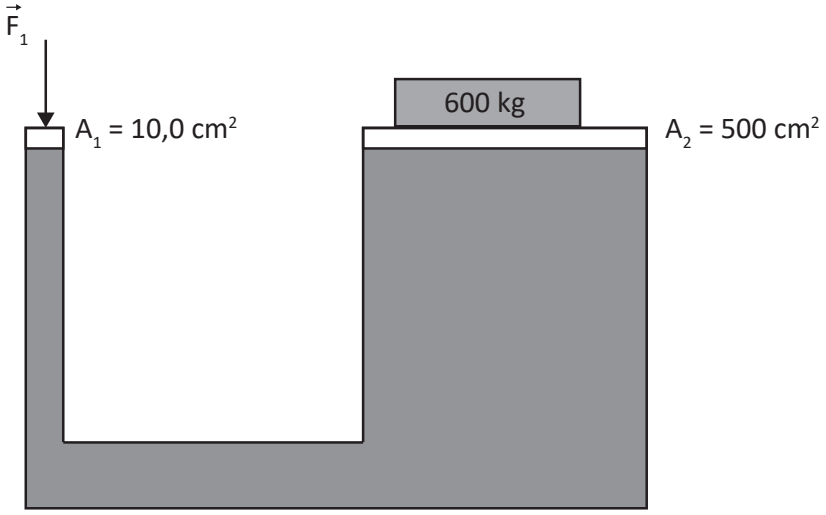
Um oscilador de frequência f estabelece uma onda estacionária no primeiro harmônico em uma corda de comprimento L, que está presa em suas duas extremidades.

Sabendo-se que a velocidade das ondas na corda é igual a v, o comprimento L da corda é

(A) v/f
(B) v/2f
(C) 2v/f
(D) 2v/3f
(E) 3v/2f

16

Na Figura abaixo, apresenta-se a ilustração de um elevador hidráulico contendo óleo.



Deseja-se levantar, com velocidade constante, um bloco de massa m = 600 kg, apoiado sobre o êmbolo de área $A_2 = 500\ cm^2$.

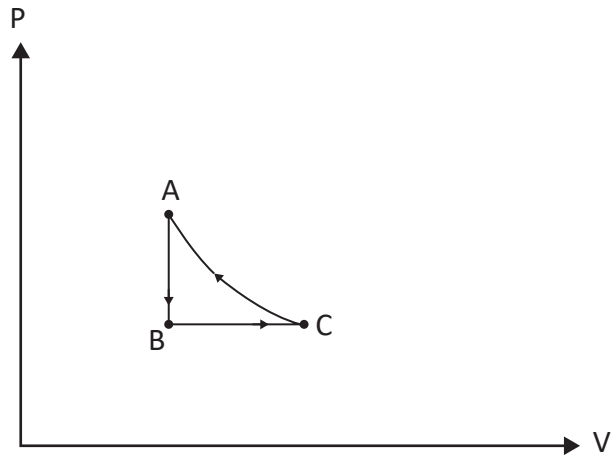
Para tal fim, a força, em N, que deve ser aplicada ao êmbolo de área $A_1 = 10{,}0\ cm^2$ é de

(A) 120
(B) 12,0
(C) 100
(D) 300
(E) 600

Dado
$g = 10{,}0\ m/s^2$

17

Um gás ideal sofre um processo cíclico, conforme mostrado na Figura abaixo, passando por três estados termodinâmicos.



Inicialmente, o gás encontra-se no estado A, com volume de 1,0 m^3, temperatura T_A = 300 K e pressão de P_A = 100 kPa. Em seguida, ele é levado ao estado B por meio de um processo isovolumétrico, no qual sua temperatura é reduzida para T_B = 150 K. A partir do estado B, o gás sofre uma expansão isobárica até atingir o estado C com volume de 2,0 m^3. Por fim, o gás é comprimido e retorna ao estado A por meio de um processo isotérmico.

A temperatura do gás, em K, no estado C é de

(A) 100
(B) 150
(C) 200
(D) 250
(E) 300

RASCUNHO

Continua

18

A tirinha a seguir ilustra, em seus quadros, algumas etapas do método científico realizadas por uma jovem cientista ao investigar o crescimento de plantas sob diferentes condições de luminosidade.

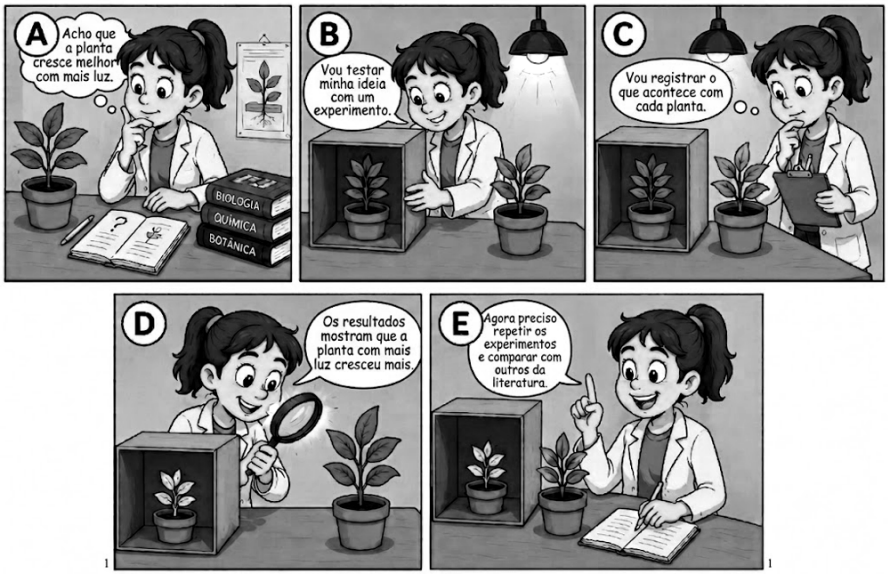


Imagem original criada por IA generativa (para fins de demonstração).

Considerando-se a sequência apresentada, a jovem pesquisadora verifica que sua hipótese foi confirmada no quadro

(A) A (B) B (C) C (D) D (E) E

19

O $CO_{2(g)}$ é utilizado na fabricação de bebidas carbonatadas, como refrigerantes e cervejas. Quimicamente, esse gás pode ser gerado pela reação entre o $CaCO_3$ sólido na presença de uma solução concentrada de $HC\ell$, conforme apresentado a seguir.

$$CaCO_{3(s)} + 2\ HC\ell_{(aq)} \rightarrow CaC\ell_{2(aq)} + CO_{2(g)} + H_2O_{(\ell)}$$

Nesse contexto, verifica-se que a velocidade de formação do $CO_{2(g)}$ é maior quando, durante a reação,

(A) se adiciona $CaCO_{3(s)}$ em pó fino, aumentando a área de contato da reação.
(B) se adiciona água destilada, reduzindo a concentração do ácido.
(C) se remove parte da solução de $HC\ell_{(aq)}$, reduzindo os reagentes disponíveis.
(D) se resfria a solução, reduzindo a energia cinética das partículas.
(E) se cobre a superfície do sólido com uma camada de óleo hidrofóbico.

20

A pilha de mercúrio (pilha de Ruben-Mallory) é um dispositivo compacto e mantém a diferença de potencial estável ao longo de seu tempo de vida, porém sua produção vem sendo desestimulada por se basear no uso do mercúrio. As semirreações que ocorrem nessa pilha são indicadas abaixo, na direção da redução.

Semirreação 1: $ZnO_{(s)} + H_2O_{(\ell)} + 2e^- \rightarrow Zn_{(s)} + 2\ OH^-_{(aq)}$; $E^o = -1{,}25$ V

Semirreação 2: $HgO_{(s)} + H_2O_{(\ell)} + 2e^- \rightarrow Hg_{(\ell)} + 2\ OH^-_{(aq)}$; $E^o = +0{,}10$ V

Com base nas semirreações apresentadas, observa-se que

(A) a reação global é $HgO_{(s)} + Zn_{(s)} \rightarrow ZnO_{(s)} + Hg_{(\ell)}$.
(B) a diferença de potencial padrão é $-1{,}15$ V.
(C) a semirreação 2 ocorre no ânodo da pilha.
(D) o eletrólito é H_2O.
(E) quatro mols de elétrons são transferidos por mol de $Zn_{(s)}$ oxidado.

21

O nuclídeo envolvido com o acidente radiológico da cidade de Goiânia, em 1987, foi o césio-137. Ele pode ser formado a partir do iodo-137 $\left({}^{137}_{53}\mathrm{I}\right)$ que pode decair até o césio-137 $\left({}^{137}_{55}\mathrm{Cs}\right)$, passando primeiro pelo xenônio-137 $\left({}^{137}_{54}\mathrm{Xe}\right)$. A esse processo, dá-se o nome de transmutação.

A quantidade e o tipo de partículas radioativas emitidas nessa transmutação é

(A) 2 partículas do tipo α
(B) 2 partículas do tipo β
(C) 2 partículas do tipo γ
(D) 2 partículas do tipo p
(E) 2 partículas do tipo n

22

Considere o preparo de soluções aquosas com 1,0 mol de cada um dos seguintes solutos em 1,0 L de água:

I - glicose ($C_6H_{12}O_6$)
II - cloreto de sódio ($NaC\ell$)
III - sulfato de alumínio [$A\ell_2(SO_4)_3$]
IV - ureia (NH_2CONH_2)
V - etanol (C_2H_5OH)

A solução que apresentará maior elevação do ponto de ebulição é a que foi preparada com o soluto

(A) I
(B) II
(C) III
(D) IV
(E) V

23

Considere as afirmativas a seguir sobre a molécula da amônia $\left(\ddot{N}H_3\right)$.

I – O arranjo eletrônico da molécula de amônia, ao redor do átomo de nitrogênio, é tetraédrico.
II – A geometria molecular da molécula de amônia é trigonal piramidal.
III – A molécula de amônia é uma molécula polar.
IV – A molécula de amônia, nas CNTP, encontra-se no estado gasoso.
V – A molécula de amônia pode atuar como base de Lewis.

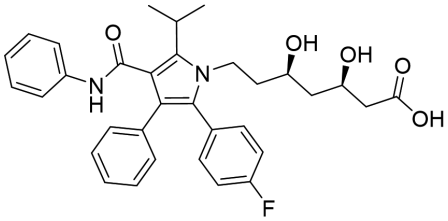
É correto o que se afirma em

(A) I e III, apenas
(B) II e IV, apenas
(C) I, II e V, apenas
(D) I, IV e V, apenas
(E) I, II, III, IV e V

Dado
N (Z = 7)
H (Z = 1)

24

A atorvastatina é um fármaco usado para reduzir os níveis de colesterol no sangue. Sua estrutura química é apresentada abaixo.

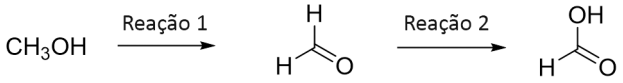


Na estrutura química da atorvastatina,

(A) há as funções ácido carboxílico e cetona.
(B) há hibridização sp^3 em todos os carbonos.
(C) há as funções amida e ácido carboxílico, além de um grupo isopropila.
(D) há centros de quiralidade nos carbonos que apresentam a função álcool primário.
(E) inexistem grupos polares, tornando esse fármaco essencialmente solúvel em água.

25

Em 2025, no Brasil, houve vários casos de intoxicação por metanol presente em bebidas alcoólicas. Essa intoxicação é causada, principalmente, pelos produtos formados durante o metabolismo do metanol, conforme mostrado abaixo.



A respeito dessas reações químicas, constata-se que a(o)

(A) primeira reação pode ser considerada uma desidratação de álcoois.
(B) metanol é oxidado a metanal e, posteriormente, a ácido metanoico.
(C) metanal formado na primeira etapa apresenta carbono com geometria tetraédrica.
(D) grupo funcional aldeído é convertido em cetona na segunda reação.
(E) mudança na hibridização do carbono de sp^2 para sp^3 ocorre na primeira reação.

RASCUNHO

Continua

CIÊNCIAS HUMANAS

26

Em 2026, a discussão sobre a importância econômica dos estreitos para a economia mundial foi intensificada. O Estreito de Gibraltar constitui um dos principais "pontos de estrangulamento" para a navegação mundial.

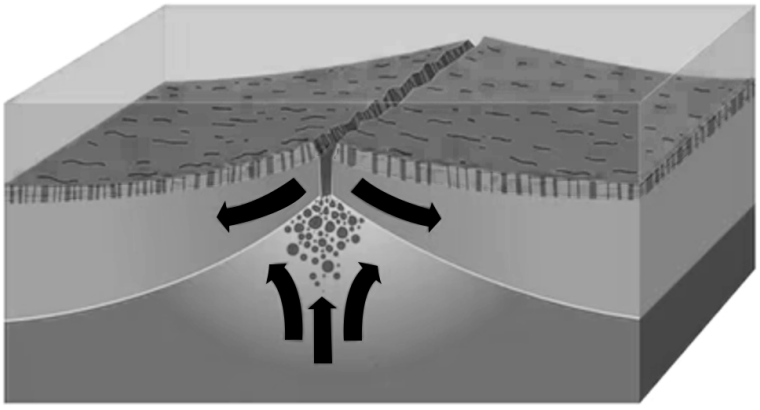
Disponível em: brasilescola.uol.com.br/geografia/estreito-de-gibraltar.htm. Acesso: 4 jun. 2026.

A relevância do Estreito de Gibraltar para o transporte marítimo decorre, sobretudo, porque esse ponto estratégico

(A) conecta o Mar Negro ao Mediterrâneo, regulando o escoamento de grãos e hidrocarbonetos da Eurásia.
(B) controla o acesso ao Canal do Panamá, encurtando a rota entre as costas atlântica e pacífica das Américas.
(C) delimita a entrada do Golfo Pérsico, permitindo o trânsito da maior parte do petróleo exportado do Oriente Médio.
(D) rivaliza com o Canal da Mancha, acessando a fachada industrial mais dinâmica da Europa, no litoral mediterrâneo.
(E) articula a rota Atlântico–Mediterrâneo, integrando o fluxo comercial demandado pelo Canal de Suez rumo à Ásia.

27

A imagem abaixo representa, de forma esquemática, o assoalho marinho sob a ação de forças internas da Terra.



Disponível em: https://hotcore.info/act/kareff-062024p.html. Acesso em: 4 jun. 2026.

Associada ao movimento indicado pelas setas, a feição de relevo destacada na porção central da imagem, é denominada

(A) subductora, área onde uma placa tectônica mergulha sob outra placa.
(B) talude, declive acentuado entre a plataforma continental e as planícies abissais.
(C) plataforma continental, porção rasa e submersa das margens dos continentes.
(D) fossa abissal, ponto de maior profundidade dos oceanos.
(E) dorsal oceânica, cordilheira submarina de expansão do fundo do mar.

28

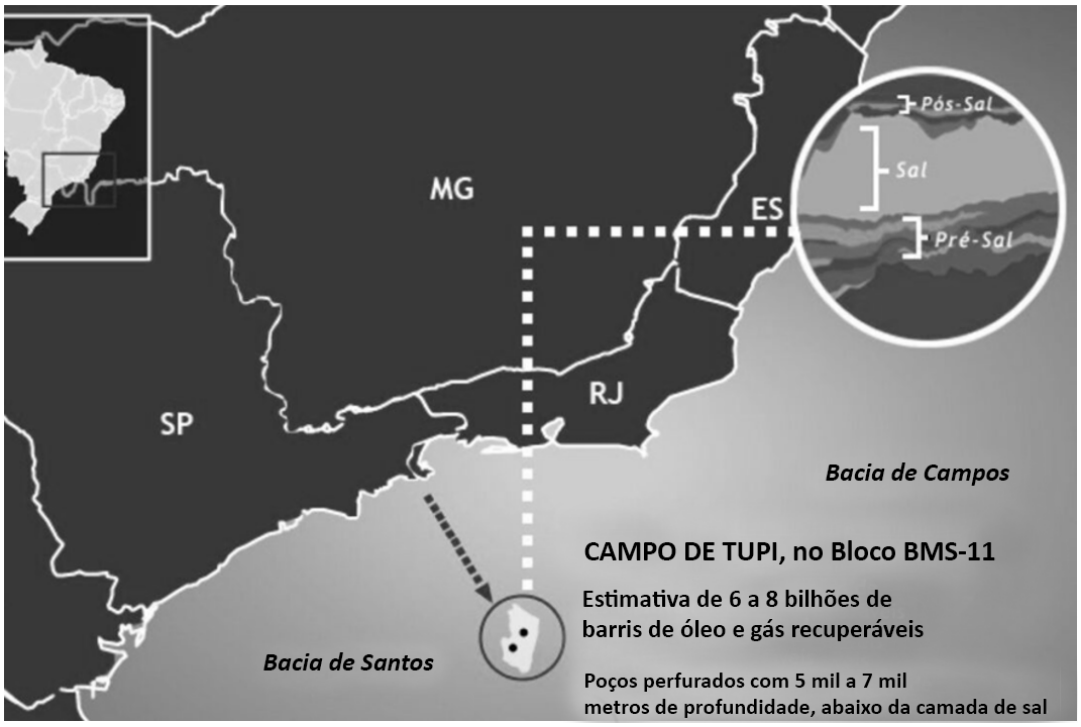
Segundo os dados do Relatório de Migrações e Asilo 2024 (AIMA, 2025), do Governo de Portugal, a taxa de crescimento do número de estrangeiros residentes nesse país, entre 2017 e 2024, foi de, aproximadamente, 280% (de cerca de 422 mil para cerca de 1 milhão e 600 mil).

É fator de atração da população migrante para o país europeu a(as)

(A) crescente oferta de postos de trabalho com salários entre os mais elevados da União Europeia, que atrai, sobretudo, profissionais altamente qualificados advindos de países de industrialização antiga.
(B) melhor qualidade de vida em Portugal, que atrai, principalmente, trabalhadores de países ricos da Europa Ocidental, como Alemanha e França, pagando os mesmos salários de seus países de origem.
(C) forte demanda por mão de obra, que decorre do rápido envelhecimento e do baixo crescimento natural da população portuguesa, tornando Portugal um polo de atração e de reposição da força de trabalho ativa.
(D) melhores posições no mercado de trabalho português que o crescimento acelerado da população nativa portuguesa proporciona aos imigrantes, devido à elevada taxa de natalidade.
(E) recentes políticas de pleno emprego para os residentes estrangeiros, que estimulam a chegada de migrantes majoritariamente idosos, o que agrava o sistema previdenciário do país.

29

Observe o cartograma abaixo.



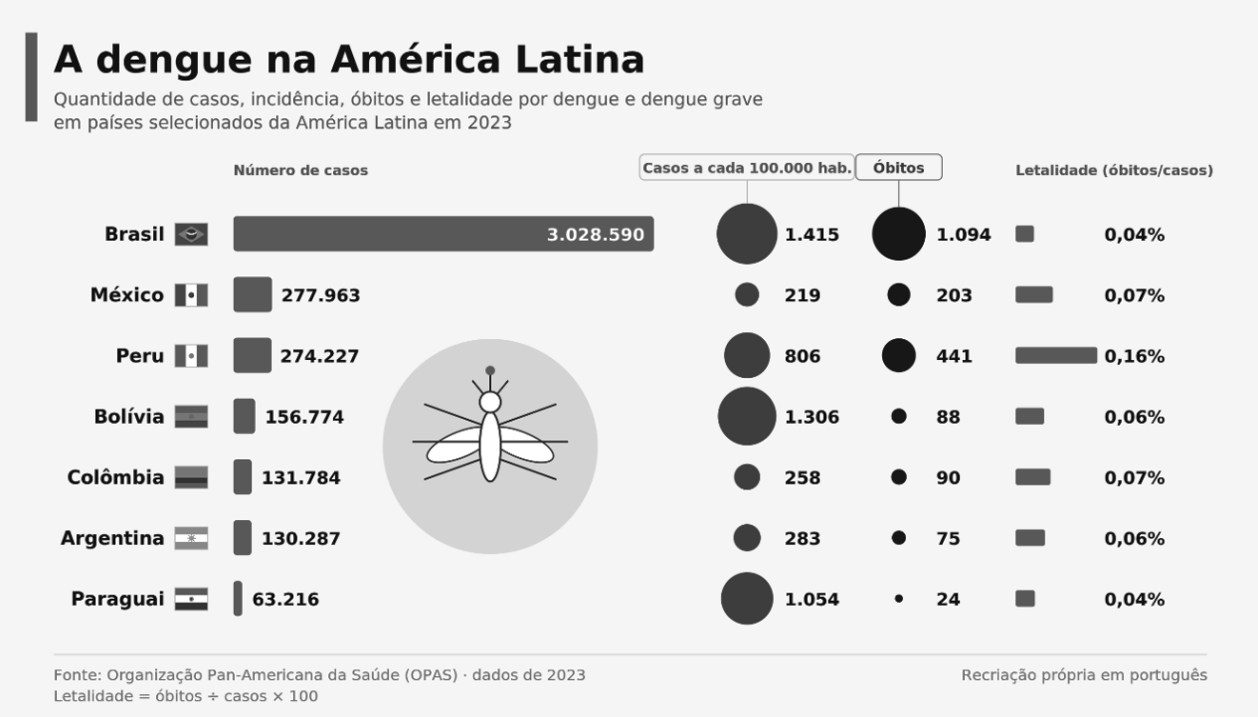
CPG Click Petróleo e Gás. Disponível em: https://clickpetroleoegas.com.br. Acesso em: 4 jun. 2026.

A busca pelo "ouro negro", apesar de tantas inovações tecnológicas e mudanças de mentalidade entre os consumidores globais nas últimas décadas, continua muito forte nas agendas de desenvolvimento das nações, o que pode gerar grandes impactos socioambientais no mundo.

Considerando-se o contexto de extração de petróleo e gás em águas profundas, representado no cartograma acima, destaca-se o seguinte impacto socioambiental decorrente da exploração de mais uma jazida no litoral brasileiro:

(A) salinização dos aquíferos e dos solos agrícolas do litoral do Sudeste, decorrendo da perfuração que atravessa a espessa camada de sal situada sob o leito oceânico e contamina as águas costeiras.
(B) desmatamento direto de extensas áreas de manguezais e de Mata Atlântica no eixo Rio de Janeiro – São Paulo, eliminando, junto à costa, os berçários naturais da fauna marinha.
(C) risco de vazamentos de óleo e gás, afetando a biodiversidade marinha bem como as comunidades pesqueiras do litoral norte paulista e sul fluminense.
(D) risco de colapso urbano decorrente de tremores de terra de grande magnitude, induzidos pela perfuração em alto-mar, ameaçando a estabilidade das construções nas cidades costeiras do Sudeste.
(E) redução do abastecimento de água potável das populações das cidades, comprometendo o consumo pela população, já que grandes volumes captados dos rios da Bacia do rio Guandu são utilizados nesse processo de extração.

Considere o infográfico a seguir para responder as questões 30 e 31.



OPAS, com dados de 2023. Acesso em: 6 jun. 2026.

30

As epidemias, suas espacialidades, seus impactos e as estratégias para a sua contenção são temas fundamentais para a qualidade da saúde pública em qualquer país. O infográfico permite cruzar dois indicadores importantes (número total de casos de dengue e grau de letalidade) de cada país indicado.

Com base no cruzamento dos indicadores, conclui-se que

(A) a letalidade e o número total de casos medem essencialmente a mesma coisa, de modo que ordenar os países por um critério ou pelo outro produziria exatamente o mesmo *ranking* ao final.
(B) a relação entre o volume de casos e a letalidade é diretamente proporcional, razão pela qual o Brasil, com mais de três milhões de casos, também apresenta a maior taxa de letalidade da região.
(C) a elevada letalidade do Peru indica que esse país registrou, em 2023, o maior número absoluto de óbitos por dengue em toda a América Latina, superando, inclusive, o Brasil em óbitos absolutos.
(D) o Peru apresenta a maior letalidade (0,16% ante 0,04%), embora registre cerca de onze vezes menos casos do que o Brasil, indicando que o número de casos e a letalidade são dimensões diferentes de uma mesma epidemia.
(E) os países com poucos casos, como Paraguai e Bolívia, têm, necessariamente, as menores taxas de letalidade, o que confirmaria uma relação direta entre quantidade de casos e a gravidade da doença.

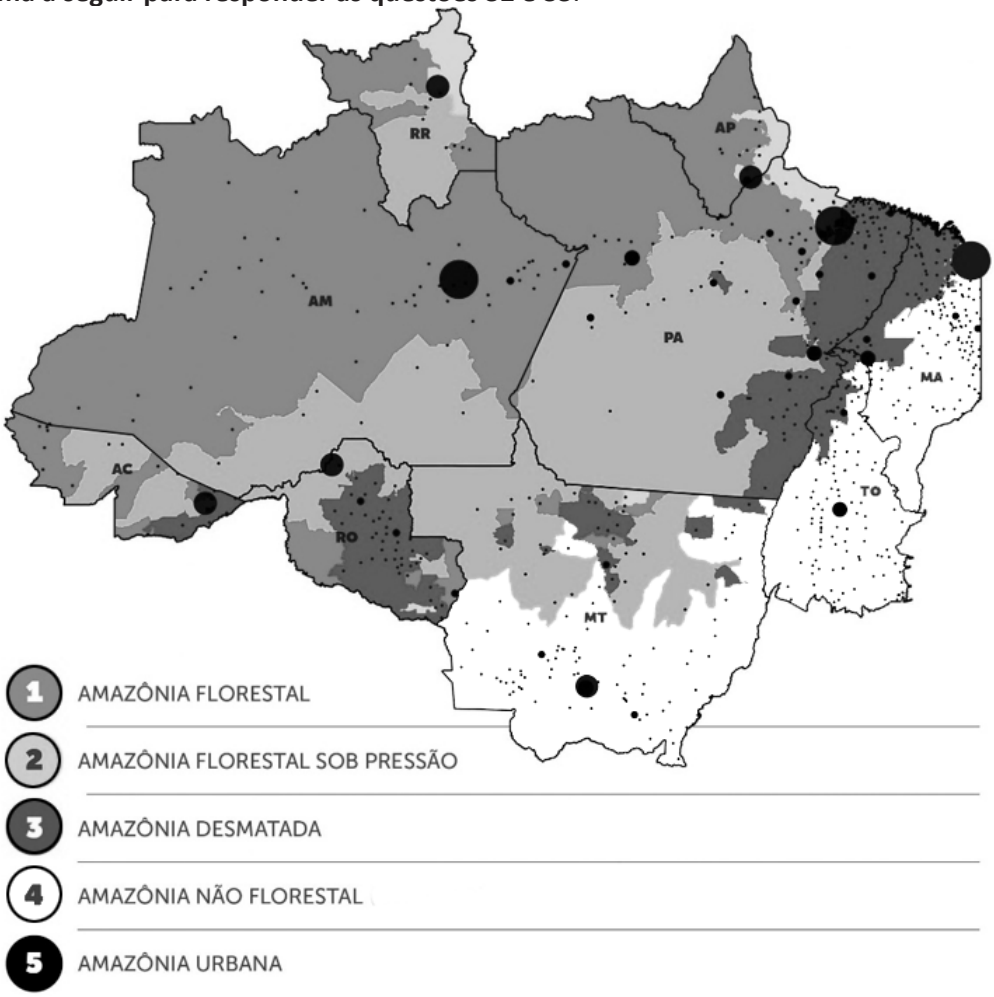
31

A magnitude e a persistência da dengue nos países latino-americanos expressam problemas estruturais de saúde coletiva e de educação ambiental.

A partir dessa perspectiva, verifica-se que a(o)

(A) dengue ocorre apenas em clima tropical, o que exclui fatores socioambientais como indicadores de vulnerabilidade.
(B) circulação da doença evidencia fragilidades na educação ambiental, pois os casos incidem, sobretudo, sobre populações em situação de vulnerabilidade socioambiental.
(C) educação ambiental é pouco relevante no combate à dengue, pois o controle efetivo do vetor limita-se à aplicação de inseticidas pelo poder público.
(D) enfrentamento da doença é questão da biomedicina, podendo ser resolvida com vacinas e com medicamentos, sem a necessidade de ações coletivas e educativas.
(E) elevado número de casos reflete a eficiência da vigilância epidemiológica e da notificação, e não as condições socioambientais de vulnerabilidade.

Considere o cartograma a seguir para responder as questões 32 e 33.



Disponível em: As Cinco Amazônias. In https://amazonia2030.org.br/wp-content/uploads/2023/05/As5Amazonias.pdf. Acesso em: 6 jun. de 2026. Adaptado.

32

Considerar os cinco conjuntos que compõem a Amazônia Legal permite adequadamente

(A) reconhecer a diversidade natural e social do território, condição para planejar políticas específicas de conservação e de desenvolvimento.
(B) indicar que a floresta úmida perde parte de sua relevância ambiental, já que esse domínio vegetativo vem sendo destruído.
(C) demonstrar que toda a região deve receber políticas públicas cujo foco central seja o domínio da floresta, seu bem mais importante.
(D) estabelecer um novo recorte político-administrativo que substitua os limites de estados e municípios por cinco grandes regiões para a gestão federal.
(E) delimitar recortes definidos por critérios físico-naturais (clima e vegetação), em detrimento de outros critérios, como as dinâmicas sociais e econômicas do território.

RASCUNHO

Continua

33

Uma das cinco zonas apresentadas no cartograma é a Amazônia não florestal, o que evidencia que a região não é coberta apenas por ambientes florestados.

Em sua dinâmica territorial, a Amazônia não florestal caracteriza-se pelo

(A) desmatamento recente, o que a fez perder rapidamente as suas áreas de floresta úmida.
(B) extrativismo da castanha-do-pará e do açaí, produtos típicos regionais da economia agrícola.
(C) baixo desenvolvimento da sua infraestrutura de redes de estradas e de internet, gerando o seu isolamento territorial.
(D) predomínio do cerrado e de campos naturais, cobertura vegetal original hoje amplamente convertida ao cultivo da soja.
(E) sistema agrícola baseado na pecuária leiteira, voltado para o abastecimento dos mercados metropolitanos do Amazonas.

34

Imagem capturada do vídeo **O lado pobre de Dubai que poucos conhecem**, do canal Universo Inteligente

Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=zKm09YIbkSs. Acesso: 4 jun. 2026. Adaptado.

A imagem retirada do vídeo mostra um grupo de trabalhadores migrantes atuantes na construção civil em Dubai, nos Emirados Árabes Unidos. A cidade é considerada uma das mais caras do mundo atualmente, com prédios luxuosos (*skyline*) e um padrão de consumo que, em muitos aspectos, supera o dos europeus e dos norte-americanos.

Na cena registrada, identifica-se o cotidiano da cidade caracterizado pela

(A) integração plena dos trabalhadores migrantes asiáticos à cidadania emiradense plena, que lhes garante o acesso aos mesmos direitos sociais da população local.
(B) segregação socioespacial entre os espaços do hiperconsumo da cidade e os espaços precários ocupados pelos trabalhadores migrantes da construção civil.
(C) presença reduzida de mão de obra estrangeira, pois a construção da cidade foi realizada pela mão de obra majoritariamente nativa dos Emirados.
(D) alta renda dos trabalhadores da construção civil, já que os altos salários pagos a eles são tão elevados quanto o custo de vida da cidade.
(E) predominância de turistas do sul da Ásia, que ocupam os espaços do hiperconsumo mais sofisticados do centro urbano.

RASCUNHO

35

Considere a ação do robô na charge abaixo.

Disponível em: https://www.jeangalvaocartunista.com/. Acesso em: 04 jun. 2026.

A crítica social registrada na charge refere-se à(ao)

(A) poluição e o descarte inadequado de resíduos sólidos, hábito humano de descaso ambiental reproduzido pelo robô.
(B) superioridade técnica das máquinas, capazes de executar tarefas com mais precisão do que os humanos.
(C) dependência tecnológica das sociedades contemporâneas, incapazes de viver sem robôs e dispositivos eletrônicos.
(D) avanço da inteligência artificial, que já teria se igualado à capacidade cognitiva dos seres humanos.
(E) risco de desemprego em massa provocado pela substituição de trabalhadores por máquinas automatizadas.

36

A Constituição de 1824, outorgada pelo imperador D. Pedro I, era considerada por seus opositores como absolutista.

Essa interpretação se deu porque essa Constituição

(A) foi aprovada rapidamente pelo Senado, mas não houve aprovação da Câmara dos Deputados.
(B) instituía voto universal, mas os analfabetos e os homens menores de 30 anos não podiam votar.
(C) determinava que os senadores seriam escolhidos pelo imperador, mas só poderiam legislar por quatro anos seguidos.
(D) autorizava todos os brasileiros e brasileiras livres a votar, mas o voto dos mais pobres valia bem menos.
(E) instituía quatro poderes, mas o Poder Moderador, exclusivo do imperador, poderia anular as decisões dos demais.

37

Considere o texto apresentado a seguir.

> "Hoje, o Mali é classificado entre os países mais pobres do mundo. De acordo com o Índice de Desenvolvimento Humano (IDH) de 2023, está entre os últimos 20 colocados no *ranking* global".
>
> Disponível em: https://revistaforum.com.br/global/este-ja-foi-o-pais-mais-rico-do-mundo-e-hoje-esta-entre-os-20-mais-pobres-do-planeta/. Acesso em: 10 jul. 2026

Dentre os fatores determinantes da situação apresentada no texto, está o

(A) colonialismo europeu
(B) determinismo geográfico
(C) islamismo radical
(D) liberalismo clássico
(E) republicanismo constitucional

38

Quando se considera a expansão colonial europeia nas Américas, entre os séculos XVI e XVII, observa-se que, nessa colonização, é um fato recorrente a

(A) expulsão das comunidades indígenas de seus territórios.
(B) adoção de um modelo centralizado com o reforço das instituições reais.
(C) entrega de altos cargos da administração colonial aos brancos nascidos na América.
(D) proibição, pelos Estados europeus, da implementação do sistema de trabalho escravo.
(E) instituição do padroado, ampliando o poder das autoridades religiosas nas colônias.

39

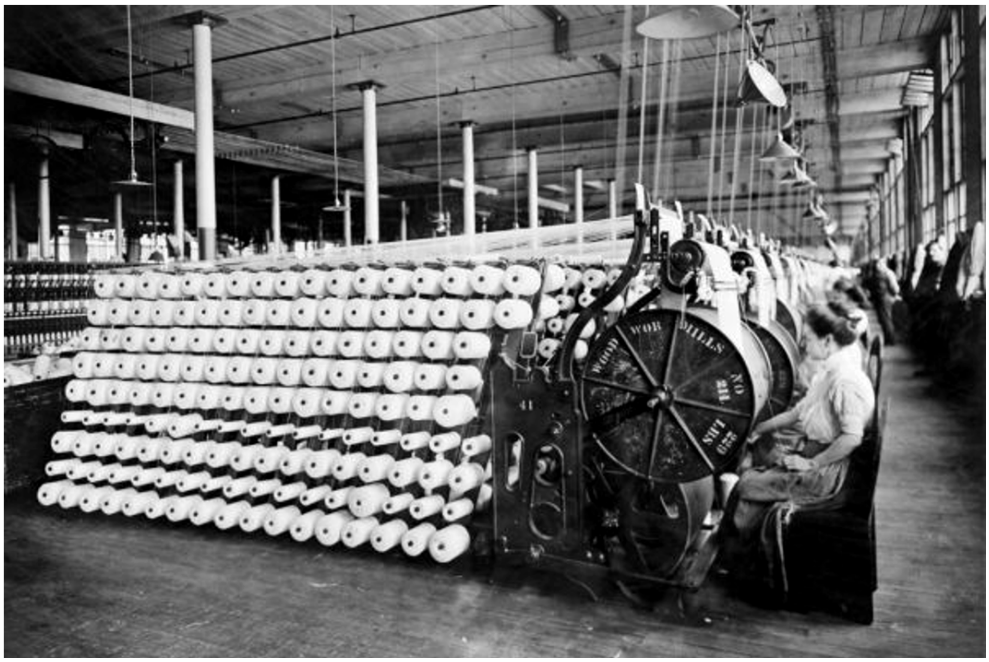
No século XVIII, países absolutistas europeus se utilizaram de algumas ideias ilustradas e promoveram reformas em seus reinos, com o objetivo de aumentar o poder das monarquias de então. O marquês de Pombal (1750-1777), primeiro-ministro de Portugal, foi um desses reformistas.

Em relação à América portuguesa, uma das ações do marquês de Pombal foi a(o)

(A) criação de governos independentes nas áreas de mineração e de produção açucareira.
(B) eliminação da proibição de comércio com as demais nações europeias, sobretudo a França.
(C) expulsão dos jesuítas da região amazônica, mantendo-os nas demais regiões do Brasil.
(D) mudança da capital da colônia de Salvador para o Rio de Janeiro, principal porto colonial.
(E) impedimento da instalação de novas áreas de mineração na região central da colônia.

40

Considere a imagem apresentada a seguir.



Disponível em: https://www.historiadomundo.com.br/idade-moderna/revolucao-industrial.htm. Acesso em: 15 jul. 2026.

Essa imagem representa a seguinte consequência da Revolução Industrial Inglesa, no século XVIII:

(A) aumento da produção no campo
(B) regularização da jornada de 8 horas diárias
(C) produção em larga escala nas fábricas
(D) melhoria das moradias para os trabalhadores
(E) promoção da educação de filhos de operários

41

Considere o texto a seguir.

> "Como já disse, eu convivo com os meus operários, acompanhando-os em todas as fases dos seus trabalhos. Nunca notei neles, mesmo no fim do dia, sintomas que indicassem excesso de cansaço, nem diminuição nas suas aptidões para continuar a trabalhar; assistindo, constantemente, as suas saídas de fábrica, depois do trabalho concluído, os tenho visto sair alerta, conversando e marchando firmes e bem-dispostos. [...] O horário mais conveniente é o de 56 horas por semana"
>
> STREET, J. *apud* PINHEIRO, Paulo Sérgio; HALL, Michael. **A classe operária no Brasil**. São Paulo: Brasiliense, 1981. p. 177-179.

O trecho acima corresponde à resposta do líder empresarial Jorge Street, no contexto das greves de 1917, à reivindicação dos trabalhadores pelo estabelecimento da jornada semanal de 48 horas.

A partir da leitura desse texto, constata-se a(o)

(A) preocupação dos empresários brasileiros com as condições de salubridade e higiene no ambiente de trabalho.
(B) resistência do empresariado às demandas dos operários em luta por melhores condições de trabalho no Brasil.
(C) conformidade da legislação trabalhista brasileira com os princípios que regulamentavam os direitos sociais pelo mundo.
(D) influência do partido comunista na construção de demandas que não correspondiam aos interesses dos trabalhadores.
(E) paternalismo do empresariado brasileiro que se antecipou ao judiciário na adoção de medidas para o mundo do trabalho.

42

Acredita-se que entre 50 e 100 milhões de pessoas, inclusive o presidente do Brasil, Rodrigues Alves, morreram em decorrência da chamada "gripe espanhola", o que representaria nada menos do que 5% da população mundial da época (1918-1920).

Nesse contexto, considere a charge apresentada a seguir.

Disponível em: https://historia.globo.com/memoria-roberto-marinho/documentos/noticia/a-pandemia-de-gripe-espanhola.ghtml. Acesso em: 15 jul. 2026.

Essa charge faz uma sátira, indicando que a crise sanitária

(A) foi provocada por divergências ideológicas.
(B) ficou limitada a um país, no caso a Espanha.
(C) decorreu do contato de humanos com animais.
(D) atingiu indistintamente todas as classes sociais.
(E) esteve relacionada à ampliação da industrialização.

43

A Constituição de 1937 determinava, em seu artigo 122, que "Todo cidadão tem o direito de manifestar o seu pensamento, oralmente, ou por escrito, impresso ou por imagens, mediante as condições e nos limites prescritos em lei."

Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/constituicao/constituicao37.htm. Acesso em: 24 jun. 2026.

Nas alíneas desse artigo, foram definidos os critérios e as possibilidades de intervenção do Estado Novo sobre a liberdade de expressão.

Utilizando-se das premissas previstas nessa Constituição, o Departamento de Imprensa e Propaganda (DIP), órgão do Governo Vargas,

(A) dificultou a profissionalização e a prática do futebol por sua origem estrangeira.
(B) proibiu a veiculação de campanhas publicitárias em todo o território nacional.
(C) promoveu a censura, fechou diversos jornais e controlou o registro de jornalistas.
(D) impediu a realização dos desfiles carnavalescos e suas práticas imorais e perniciosas.
(E) restringiu acesso da população brasileira ao rádio por seu conteúdo ofensivo às famílias.

44

Entre 1958 e 1960, o fotógrafo Peter Scheier retratou o cotidiano da edificação da cidade de Brasília. A imagem abaixo registra o processo de construção da nova capital do país.

Brasília, 1960. Peter Scheier / Acervo IMS

Disponível em: https://ims.com.br/exposicao/as-construcoes-de-brasilia/. Acesso em: 26 jun. 2026.

A imagem enfatiza a seguinte contradição:

(A) transporte dos operários e modal ferroviário
(B) pobreza dos camponeses e expansão agrícola
(C) autoritarismo dos militares e carisma presidencial
(D) renda dos governantes e políticas habitacionais
(E) cotidiano dos trabalhadores e utopia modernista

45

Considere o texto a seguir, que se refere a um momento central da tensão política mundial após a Segunda Grande Guerra.

> "Portão de Brandemburgo fechado". Com essa manchete, nas primeiras horas de 13 de agosto de 1961, a agência de notícias Associated Press (AP) anunciava um acontecimento decisivo para a história mundial: a construção do Muro de Berlim. Nesse dia foi bloqueada a marca registrada da metrópole alemã, situada diretamente na junção entre o Leste e o Oeste. Simultaneamente, soldados do Exército Nacional do Povo (NVA) e tropas de operários da República Democrática Alemã (RDA) obstruíam todos os demais caminhos para Berlim Ocidental, de início com arame farpado.
>
> Disponível em: https://g1.globo.com/mundo/noticia/2021/08/13/ha-60-anos-era-erguido-o-muro-de-berlim-simbolo-da-guerra-fria.ghtml. Acesso em: 26 jun. 2026. Adaptado.

A polarização ocorrida nesse período dividiu populações, continentes e nações entre

(A) anarquistas e comunistas
(B) capitalistas e socialistas
(C) fascistas e parlamentaristas
(D) liberais e social-democratas
(E) monarquistas e republicanos

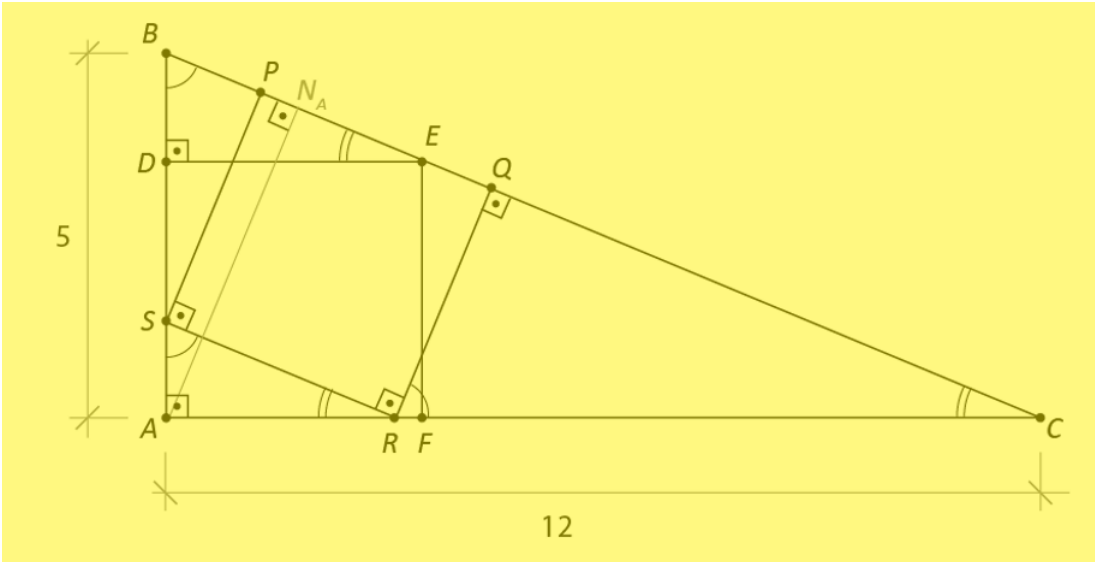
RASCUNHO

Continua

PROVA DISCURSIVA DE MATEMÁTICA

Questão 1 (Valor: 2,5 pontos)

Seja *ABC* um triângulo retângulo em *A*, conforme mostrado na Figura a seguir. Sabe-se que os segmentos *AB* e *AC* medem 5 e 12, respectivamente.



a) Quanto mede o segmento *BC*?

Por Pitágoras, $\overline{BC}^2 = 5^2 + 12^2 \Rightarrow \overline{BC} = 13$

b) Sabe-se que *ADEF* é um quadrado, que *D* está no segmento *AB*, que *E* está no segmento *BC* e que *F* está no segmento *AC*. Quanto mede o segmento *AD*?

O triângulo BDE é semelhante ao triângulo BAC. Tomando $x = \overline{DE} = \overline{AD}$, tem-se $\overline{BD} = 5 - x$. Portanto,

$$\frac{5-x}{x} = \frac{5}{12} \Rightarrow x = \frac{60}{17}$$

(Continua)

Questão 1 ***(Continuação)***

c) Sabe-se que *PQRS* é um quadrado, que *P* e *Q* estão no segmento *BC*, que *R* está no segmento *AC* e que *S* está no segmento *AB*. Quanto mede o segmento *PQ*?

Seja $A\tilde{A}$ a altura do triângulo BAC relativa ao lado BC.

O triângulo $B\tilde{A}A$ é semelhante ao triângulo BAC. Tomando $h = \overline{A\tilde{A}}$, tem-se

$$\frac{h}{5} = \frac{12}{13} \Rightarrow h = \frac{60}{13}$$

Defina $\lambda \in \mathbb{R}$ por $\overline{PQ} = \overline{PS} = \lambda\,\overline{A\tilde{A}} = \lambda h = \lambda\frac{60}{13}$.

Desta forma, $5^2 = \left(\overline{B\tilde{A}}\right)^2 + \left(\frac{60}{13}\right)^2 \Rightarrow \overline{B\tilde{A}} = \frac{25}{13}$. Logo, $\overline{BP} = \lambda \cdot \frac{25}{13}$.

Analogamente, $12^2 = \left(\overline{C\tilde{A}}\right)^2 + \left(\frac{60}{13}\right)^2 \Rightarrow \overline{C\tilde{A}} = \frac{144}{13}$. Logo, $\overline{QC} = \lambda \cdot \frac{144}{13}$.

Assim, $\overline{BC} = \overline{BP} + \overline{PQ} + \overline{QC} \Rightarrow 13 = \lambda \cdot \frac{25}{13} + \lambda \cdot \frac{60}{13} + \lambda \cdot \frac{144}{13} \Rightarrow \lambda = \frac{169}{229}$.

Por fim, $\overline{PQ} = \lambda \cdot \frac{60}{13} = \frac{780}{229}$.

(Continua)

Questão 2 (Valor: 2,5 pontos)

Seja H a hipérbole de equação $2x^2 - y^2 = -1$. Para $r > 0$, seja C_r a circunferência de raio r e centro $(0, r+1)$.

a) A circunferência C_2 tem raio 2 e centro (0,3). Qual é a equação de C_2?

A equação da circunferência C_2 é $(x-0)^2 + (y-3)^2 = 4$.

b) Quais são os pontos de interseção entre a hipérbole H e a circunferência C_2?

A interseção entre a hipérbole H e a circunferência C_2 é dada por

$$\begin{cases} 2x^2 - y^2 = -1 \\ x^2 + (y-3)^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = \dfrac{y^2-1}{2} \\ x^2 + y^2 - 6y + 5 = 0 \end{cases}$$

Logo,

$$\frac{y^2-1}{2} + y^2 - 6y + 5 = 0 \Rightarrow y^2 - 4y + 3 = 0 \Rightarrow y = 1 \text{ ou } y = 3.$$

Se $y = 1$, então $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$. Se $y = 3$, então $x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$.

Desta forma, os pontos de interseção entre H e C_2 são $(0,1)$, $(-2,3)$ e $(2,3)$.

Observação: O ponto $(0,1)$ é um ponto de interseção de multiplicidade 2.

(Continua)

Questão 2 ***(Continuação)***

c) Em função de *r*, quantos pontos de interseção no plano $\mathbb{R}^2$ existem entre a hipérbole *H* e a circunferência C_r? Divida em casos se necessário.

A interseção entre a hipérbole H e a circunferência C_r é dada por

$$\begin{cases} 2x^2 - y^2 = -1 \\ x^2 + (y - (r+1))^2 = r^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = \dfrac{y^2 - 1}{2} \\ x^2 + y^2 - (2r+2)y + 2r + 1 = 0 \end{cases}$$

Logo,

$$\frac{y^2 - 1}{2} + y^2 - (2r+2)y + 2r + 1 = 0 \Rightarrow 3y^2 - (4r+4)y + 4r + 1 = 0 \Rightarrow y = 1 \text{ ou } y = \frac{4r+1}{3}.$$

O vértice superior da hipérbole é o ponto $(0,1)$, logo devemos ter $y \geq 1$. A solução com $y = \frac{4r+1}{3}$ é real apenas se $r \geq \frac{1}{2}$. Note que se $r = \frac{1}{2}$, a segunda equação nos dá novamente $y = 1$. Nesse caso, o ponto de interseção é o ponto $(0,1)$ e tem multiplicidade 4.

Se $0 < r \leq \frac{1}{2}$, então existe um único ponto de interseção entre H e C_r.

Se $r > \frac{1}{2}$, então existem três pontos de interseção entre H e C_r. Nesse caso, o ponto de interseção $(0,1)$ tem multiplicidade 2, e os outros dois pontos são $\left(-\frac{2}{3}\sqrt{2r^2 + r - 1}, \frac{4r+1}{3}\right)$ e $\left(\frac{2}{3}\sqrt{2r^2 + r - 1}, \frac{4r+1}{3}\right)$.

(Continua)

Questão 3 (Valor: 2,5 pontos)

Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{5}{2}x+\frac{15}{4}\left(|x-1|-|x+1|\right)$.

a) Calcule o valor de $f(1)$.

$$f(1)=\frac{5}{2}+\frac{15}{4}(|1-1|\ -\ |1+1|)=\frac{5}{2}-\frac{15}{2}=-5$$

b) Encontre todas as soluções reais da equação $f(x)=0$.

A questão será resolvida separando em casos.

- Se $x<-1$, então $f(x)=\frac{5}{2}x+\frac{15}{4}(-x+1+x+1)=\frac{5}{2}x+\frac{15}{2}=0\ \Rightarrow x=-3.$
- Se $-1\leq x<1$, então $f(x)=\frac{5}{2}x+\frac{15}{4}(-x+1-x-1)=\frac{5}{2}x-\frac{15}{2}x=0\ \Rightarrow x=0.$
- Se $x\geq 1$, então $f(x)=\frac{5}{2}x+\frac{15}{4}(x-1-x-1)=\frac{5}{2}x-\frac{15}{2}=0\ \Rightarrow x=3.$

Desta forma, $f(x)=0\ \Leftrightarrow x\in\{-3,0,3\}$.

(Continua)

Questão 3 ***(Continuação)***

c) Determine o número de soluções reais distintas da equação $f\left(f\left(f\left(x\right)\right)\right)=\frac{x}{2}$.

Se $x > 5$, tem-se $f(x) > x$. Se $x < -5$, tem-se $f(x) < x$. Assim, só nos interessa o intervalo $[-5,5]$.

O intervalo $[-5,5]$ pode ser decomposto como a união dos 3 intervalos $[-5,-1]$, $[-1,1]$, $[1,5]$.

Cada um dos intervalos acima é mapeado por f de forma afim no intervalo $[-5,5]$.

A função $f^2 = f \circ f$ também tem gráfico poligonal. O intervalo $[-5,5]$ agora é decomposto em $3^2 = 9$ intervalos. Cada um desses 9 intervalos quais é mapeado de forma afim em $[-5,5]$.

Da mesma forma, a função $f^3 = f \circ f \circ f$ tem gráfico poligonal. O intervalo $[-5,5]$ agora é decomposto em $3^3 = 27$ intervalos. Cada um desses 27 intervalos é mapeado de forma afim em $[-5,5]$. A restrição do gráfico de f a cada um desses 27 intervalos cruza a reta $y = \frac{x}{2}$ em exatamente um ponto. Observe que todos os coeficientes angulares desses segmentos de reta têm módulo maior do que 1. Assim, a equação admite exatamente 27 raízes reais, todas no intervalo $[-5,5]$.

(Continua)

Questão 4 (Valor: 2,5 pontos)

Em uma gaveta há 5 caixas iguais, e, em cada caixa, há 4 bolas.
Cada bola é branca ou preta, e as bolas são iguais, exceto pela cor.
Em uma caixa, há 4 bolas brancas.
Em outra, há 3 bolas brancas e 1 preta.
Em outra, há 2 bolas brancas e 2 pretas.
Em outra, há 1 bola branca e 3 pretas.
Na caixa restante, há 4 bolas pretas.

a) Retira-se da gaveta uma caixa ao acaso. Retira-se da caixa uma bola ao acaso e examina-se a sua cor. Depois disso, recoloca-se a bola na caixa e a caixa na gaveta.
Qual é a probabilidade de que a bola retirada seja branca?

As 20 bolas têm igual probabilidade de serem sorteadas. A probabilidade pedida é $\frac{1}{2}$.

b) Retira-se da gaveta uma caixa ao acaso. Retiram-se da caixa todas as 4 bolas e examinam-se suas cores. Depois disso, recolocam-se as 4 bolas na caixa e a caixa na gaveta.
Qual é a probabilidade de que as 4 bolas retiradas sejam da mesma cor?

Chamemos as 5 caixas de C_0, C_1, C_2, C_3 e C_4. A caixa C_k tem k bolas pretas e $4-k$ bolas brancas.

Se a caixa sorteada for C_0 ou C_4, então as 4 bolas serão da mesma cor; caso contrário, não.
Como as 5 caixas são equiprováveis, a probabilidade pedida é $\frac{2}{5}$.

(Continua)

Questão 4 ***(Continuação)***

c) Retira-se da gaveta uma caixa ao acaso. Retiram-se da caixa 2 bolas simultaneamente e ao acaso. Examinam-se suas cores.
Qual é a probabilidade de que as 2 bolas retiradas sejam da mesma cor?

Para cada caixa, o número de conjuntos de duas bolas é $\binom{4}{2} = 6$. Vamos contar os casos favoráveis para a caixa C_k.

Há $\binom{k}{2}$conjuntos de duas bolas pretas e $\binom{4-k}{2}$ conjuntos de duas bolas brancas.
Assim, a probabilidade condicionada a escolhermos a caixa C_k é $\frac{1}{6}\left(\binom{k}{2} + \binom{4-k}{2}\right)$.
A probabilidade pedida é, portanto,

$$P = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} \cdot \sum_{k=0}^{4} \left(\binom{k}{2} + \binom{4-k}{2}\right) = \frac{1}{15} \cdot \sum_{k=0}^{4} \binom{k}{2} = \frac{\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}}{15} = \frac{1+3+6}{15} = \frac{2}{3}.$$