

Geometria do Rastro de Bicicletas

Leonardo Fontoura e Frederico Israel
Orientador: Jairo Bochi
Departamento de Matemática, PUC–Rio

31 de Julho de 2011

1 Introdução

Suponha que temos a trajetória da roda da frente de uma bicicleta e que sabemos a posição inicial dela, então, será que é possível determinar o caminho que a roda de trás percorreu? Sim, de fato é possível, se tratarmos esse problema como uma equação diferencial ordinária (de segunda ordem, como veremos)!

Suponha que tenhamos a trajetória de uma das rodas de uma bicicleta e que sabemos sua posição inicial e tamanho, será então possível determinar o caminho que a outra roda percorre?

Se tivermos o rastro da roda de trás, o problema é resolvido trivialmente, pois o vetor tangente ao rastro da roda de trás sempre aponta na direção da roda dianteira.

Porém, o problema contrário é mais interessante, e acaba recaindo em resolver uma equação diferencial ordinária não-linear, que em geral não pode ser resolvida explicitamente.

Em alguns casos particulares, é possível resolver a E.D.O. explicitamente, como no caso em que a roda da frente percorre uma reta ou um círculo, como foi considerado por Euler [C]. O caso da reta foi considerado por Newton e a roda de trás percorre uma curva conhecida com *tractriz*.

2 Definições

Comprimento de Arco: Seja C uma curva no \mathbb{R}^2 , determinada pela função vetorial $f(t) = (x(t), y(t))$, onde $t \in [a, b]$. Se L é o comprimento total da curva C , então $L = \int_a^b \|f'(u)\| du$.

Parametrização por Comprimento de Arco: Considere a mesma curva C anterior. Vamos reparametrizar C usando $s \in [0, L]$. Para cada s , existe um único ponto P tal que s é o tamanho percorrido da curva começando do ponto $A = (x(a), y(a))$ e terminando em P . Podemos assumir que C pode ser reparametrizada pela função vetorial $\alpha(s) = (X(s), Y(s))$, onde $s \in [0, L]$.

Para cada $t \in [a, b]$, definimos a função de tamanho, $l(t) = \int_a^t \|f'(u)\| du$. Essa função de tamanho mapeia o intervalo fechado $[a, b]$ no intervalo fechado $[0, L]$ e ela é bijetora, pois $l(t)$ é uma função contínua e crescente. Então, podemos pensar que para cada t pertencente a $[a, b]$ o comprimento de arco $s = l(t)$ e $t = l^{-1}(s)$ e agora, cada ponto da curva que antes era dado por $(x(t), y(t))$ agora é dado por $\alpha(s) = (x(l^{-1}(s)), y(l^{-1}(s))) = (X(s), Y(s))$.

Desse modo, ganhamos algumas propriedades interessantes. A primeira delas é que a função vetorial $\alpha'(s)$ não só tem tamanho constante, como tem tamanho unitário, pois

$$s = \int_0^s \|\alpha'(u)\| du$$

Derivando ambos os lados em respeito a s , temos

$$1 = \|\alpha'(s)\|$$

Agora, elevamos os dois lados ao quadrado e utilizamos o fato de que o tamanho de um vetor ao quadrado é igual ao seu produto interno do vetor consigo mesmo.

$$1 = \|\alpha'(s)\|^2 = \langle (X'(s), Y'(s)), (X'(s), Y'(s)) \rangle$$

$$1 = [X'(s)]^2 + [Y'(s)]^2$$

Derivamos mais uma vez em respeito a s e dividimos por 2:

$$0 = X'(s) \cdot X''(s) + Y'(s) \cdot Y''(s)$$

Ou seja:

$$0 = \langle (X'(s), Y'(s)), (X''(s), Y''(s)) \rangle = \langle \alpha'(s), \alpha''(s) \rangle$$

Mostramos que $\langle \alpha'(s), \alpha''(s) \rangle = 0$, que será utilizado mais a frente.

Curvatura: Considerando a mesma superfície C e as outras funções previamente definidas, definiremos o **vetor de curvatura** como o vetor $\alpha''(s)$. Então, podemos definir a curvatura como sendo o tamanho do vetor de curvatura:

$$k = \|\alpha''(s)\|$$

Quando a curvatura k é diferente de zero, definimos $\rho = \frac{1}{k}$ como o raio da curvatura.

3 Bicicleta

Antes de tudo, temos que definir o problema em termos com os quais possamos trabalhar. É intuitivo definir a bicicleta como um segmento orientado AB , de tamanho l , onde o ponto A representa a roda de trás, cuja trajetória é sempre tangente ao segmento AB , o que era de se esperar, já que só podemos virar a roda da frente de uma bicicleta, que é o ponto B do segmento.

Denotaremos o caminho percorrido pela roda da frente B , por Γ , e o parametrizaremos pelo seu comprimento de arco t , e o caminho percorrido pela roda de trás A , por γ e permitimos que γ tenha singularidades do tipo cusp. Assim, dado um l , definimos a correspondência $T_l : \gamma \rightarrow \Gamma_l$, sempre usando a mesma orientação para AB .

Observe que através de uma dilatação, podemos supor $l = 1$, se necessário; mas não o faremos aqui.

Seja $\alpha(t)$ o ângulo (orientado) entre os vetores $\Gamma'(t)$ e \vec{AB} ; veja a Figura 1. Conhecida a curva Γ , a função $\alpha(t)$ determina unicamente a curva γ .

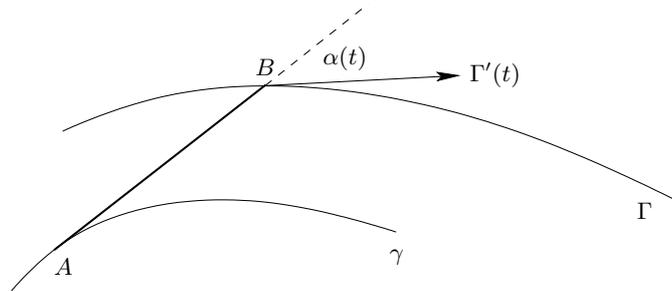


Figura 1: O ângulo $\alpha(t)$.

Também, denotaremos por $\kappa(t)$ a curvatura de $\Gamma(t)$, por k a curvatura de γ e por x o comprimento de arco de γ . Note que nos cusps de γ , $k = \infty$.

Teorema 1. A condição $T_l(\gamma) = \Gamma_l(t)$ é equivalente à seguinte equação diferencial na função $\alpha(t)$:

$$\frac{d\alpha(t)}{dt} + \frac{\sin(\alpha(t))}{l} = \kappa(t) \quad (1)$$

Também se tem que: $\|\frac{dx}{dt}\| = \|\cos(\alpha)\|$ e $k = \frac{\tan \alpha}{l}$.

Demonstração. Seja J uma rotação do plano pelo ângulo $\frac{\pi}{2}$. Então, o final do segmento de tamanho l que faz ângulo de $\pi - \alpha(t)$ com $\Gamma'(t)$ é

$$\gamma(t) = \Gamma(t) - l\Gamma'(t) \cos(\alpha(t)) + lJ\Gamma'(t) \sin(\alpha(t)) \quad (2)$$

Diferenciando em relação a t , temos:

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= \Gamma'(t) - l\Gamma''(t) \cos(\alpha(t)) + l\Gamma'(t) \sin(\alpha(t))\alpha'(t) \\ &\quad + lJ\Gamma''(t) \sin(\alpha(t)) + lJ\Gamma'(t) \cos(\alpha(t))\alpha'(t) \end{aligned}$$

Porém, $\Gamma''(t) = \kappa(t)J\Gamma'(t)$. Substituindo, e notando que $J \cdot J = -Id$, ficamos com:

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= \Gamma'(t) - l\kappa(t)J\Gamma'(t) \cos(\alpha(t)) + \Gamma'(t) \sin(\alpha(t))\alpha'(t) \\ &\quad - l\kappa(t)\Gamma'(t) \sin(\alpha(t)) + lJ\Gamma'(t) \cos(\alpha(t))\alpha'(t) \end{aligned}$$

Pondo $J\Gamma'(t)$ e $\Gamma'(t)$ em evidência:

$$\gamma'(t) = \Gamma'(t)\{1 + l \sin(\alpha(t))[\alpha'(t) - \kappa(t)]\} + J\Gamma'(t)l \cos(\alpha(t))[\alpha'(t) - \kappa(t)]$$

Para que $T_l(\gamma) = \Gamma_l$ seja verdade, a direção tangente à $\gamma'(t)$ tem que ser paralela ao vetor

$$v(t) = -\Gamma'(t) \cos(\alpha(t)) + J\Gamma'(t) \sin(\alpha(t))$$

Ou seja, o produto vetorial entre $\gamma'(t)$ e $v(t)$ tem que ser 0.

$$\det \begin{bmatrix} 1 + l \sin(\alpha(t))\{\alpha'(t) - \kappa(t)\} & l \cos(\alpha(t))\{\alpha'(t) - \kappa(t)\} \\ -\cos(\alpha(t)) & \sin(\alpha(t)) \end{bmatrix} = 0$$

Fazendo as contas, temos

$$\sin(\alpha(t)) + l \sin^2(\alpha(t))\{\alpha'(t) - \kappa(t)\} + l \cos^2(\alpha(t))\{\alpha'(t) - \kappa(t)\} = 0$$

$$\sin(\alpha(t)) + l\alpha'(t)\{\sin^2(\alpha(t)) + \cos^2(\alpha(t))\} - l\kappa(t)\{\sin^2(\alpha(t)) + \cos^2(\alpha(t))\} = 0$$

$$\begin{aligned}\sin(\alpha(t)) + l\alpha'(t) &= l\kappa(t) \\ \frac{\sin(\alpha(t))}{l} + \alpha'(t) &= \kappa(t)\end{aligned}\tag{3}$$

Finalmente chegando à $\frac{d\alpha(t)}{t} + \frac{\sin(\alpha(t))}{l} = \kappa(t)$, como queríamos. Portanto a primeira parte do teorema é verdade.

Agora, vamos calcular $\left\|\frac{d\gamma}{dt}\right\|$. Substituindo (3) em (1), temos:

$$\gamma'(t) = \Gamma'(t)[1 + \sin^2(\alpha(t))] + J\Gamma'(t)[- \cos(\alpha(t)) \sin(\alpha(t))]$$

Então,

$$\begin{aligned}\left\|\frac{d\gamma}{dt}\right\|^2 &= \langle \cos^2(\alpha(t)), -\cos^2(\alpha(t)) \sin(\alpha(t)) \rangle = \\ &= \cos^4(\alpha(t)) + \cos^2(\alpha(t)) \sin^2(\alpha(t)) = \cos^2(\alpha(t))\end{aligned}$$

Tirando a raiz quadrada em ambos os lados:

$$\left\|\frac{d\gamma}{dt}\right\| = \sqrt{\cos^2(\alpha(t))} = \|\cos(\alpha(t))\|$$

Note que $\left\|\frac{d\gamma}{dt}\right\| = \left\|\frac{d\gamma}{dx}\right\| \left\|\frac{dx}{dt}\right\|$ e que $\left\|\frac{d\gamma}{dx}\right\| = 1$, pois x é o parâmetro de comprimento de arco de γ . Então, concluímos que

$$\left\|\frac{dx}{dt}\right\| = \|\cos(\alpha(t))\|\tag{4}$$

Agora só nos resta mostrar que $k = \frac{\tan(\alpha(t))}{l}$, mas para isso, precisaremos da segunda derivada de γ em relação a x .

Como $k = \left\|\frac{d^2\gamma}{dx^2}\right\|$, podemos usar (4) para calculá-lo.

$$\frac{d\gamma}{dx} = \frac{dt}{dx} \cdot \frac{d\gamma}{dt} = \cos(\alpha(t))\Gamma'(t) - \sin(\alpha(t))J\Gamma'(t) = \star$$

Agora, precisamos de $\frac{d\star}{dt}$ antes de continuarmos.

$$\begin{aligned}\frac{d\star}{dt} &= \Gamma''(t) \cos(\alpha(t)) - \sin(\alpha(t))\alpha'(t)\Gamma'(t) - \sin(\alpha(t))J\Gamma''(t) - \cos(\alpha(t))\alpha'(t)J\Gamma'(t) = \\ &= \kappa(t)J\Gamma'(t) \cos(\alpha(t)) - \sin(\alpha(t))\alpha'(t)\Gamma'(t) + \sin(\alpha(t))\kappa(t)\Gamma'(t) - \cos(\alpha(t))\alpha'(t)J\Gamma'(t) = \\ &= \Gamma'(t) - \sin(\alpha(t))\alpha'(t) + \sin(\alpha(t))\kappa(t) + J\Gamma'(t) - \cos(\alpha(t))\alpha'(t) + \cos(\alpha(t))\kappa(t) =\end{aligned}$$

$$= \Gamma'(t) \frac{\sin^2(\alpha(t))}{l} + J\Gamma'(t) \cos(\alpha(t)) \frac{\sin(\alpha(t))}{l}$$

Finalmente podemos calcular $\frac{d^2\gamma}{dx^2}$.

$$\begin{aligned} \frac{d^2\gamma}{dx^2} &= \frac{dt}{dx} \cdot \frac{d\gamma}{dt} = \frac{dt}{dx} \cdot \frac{d\star}{dt} = \\ &= \Gamma'(t) \tan(\alpha(t)) \frac{\sin(\alpha(t))}{l} + J\Gamma'(t) \frac{\tan(\alpha(t))}{l} \end{aligned} \quad (5)$$

Fazemos a norma de (5) e acharemos k .

$$\begin{aligned} \left\| \frac{d^2\gamma}{dx^2} \right\|^2 &= \left\langle \frac{d^2\gamma}{dx^2}, \frac{d^2\gamma}{dx^2} \right\rangle = \\ &= \frac{\tan^2(\alpha(t)) \sin^2(\alpha(t))}{l^2} + \frac{\sin^2(\alpha(t))}{l^2} = \frac{\tan^2(\alpha(t))}{l^2} \end{aligned}$$

Logo, temos que $\left\| \frac{d^2\gamma}{dx^2} \right\| = \frac{\tan(\alpha(t))}{l} = k(t)$, como queríamos demonstrar. \square

4 Outros Conceitos Importantes

Transformações de Möbius: são funções $f : \mathbb{R} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ (geralmente, elas são definidas sobre os complexos estendidos, mas por enquanto usaremos os reais estendidos), onde:

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}, \quad ad - bc \neq 0$$

$$\begin{cases} f(-d/c) = \infty \\ f(\infty) = a/c \end{cases}$$

As transformações de Möbius têm uma relação com transformações lineares $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ invertíveis (na realidade, as não invertíveis também servem, mas são triviais, já que as transformações de Möbius correspondentes são funções constantes).

Considere o conjunto $\mathfrak{p} = \{\text{retas em } \mathbb{R}^2 \text{ que passam pela origem}\}$. Então, temos que se $R \in \mathfrak{p} \Rightarrow T(R) \in \mathfrak{p}$, ou seja, T induz transformações de \mathfrak{p} em \mathfrak{p} que é $\bar{T} : \mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{p}$. Note que se conhecemos T , podemos encontrar \bar{T} , mas não podemos fazer o contrário, como podem ver no seguinte exemplo:

$$T(v) = v \Rightarrow T = id_{\mathbb{R}^2} \Rightarrow \bar{T} = id_{\mathfrak{p}}$$

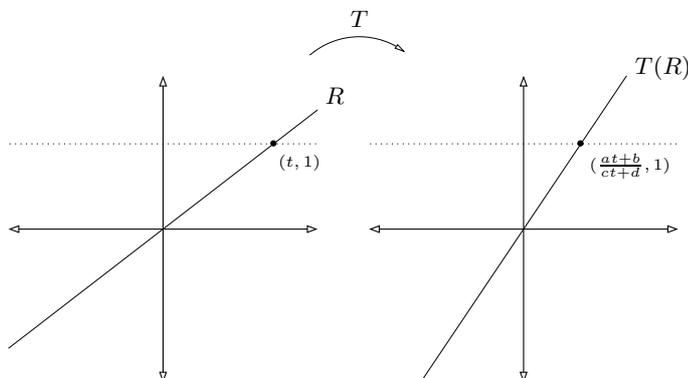


Figura 2: Transformação linear T

$$T_1(v) = \frac{v}{2} \Rightarrow \overline{T_1} = id_{\mathfrak{p}}$$

Podemos descrever \overline{T} utilizando uma parametrização de \mathfrak{p} como podemos ver em 2: dado $R \in \mathfrak{p}$ seja $t = t(R)$, tal que $(t, 1) \in R$, ou seja, o ponto em que R cruza com o eixo $y = 1$. Se R for o eixo x , definimos $t(R) = \infty$. Assim, \mathfrak{p} passa a ser identificado com $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Se considerarmos $T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e aplicarmos T à $(t, 1) \in R$, obteremos $(at + b, ct + d) \in T(R)$. Porém, estamos interessados somente onde $T(R)$ intercepta $y = 1$, então, encontramos $\left(\frac{at+b}{ct+d}, 1\right) \in T(R)$, que caracteriza a transformação de Möbius $f(t) = \frac{at+b}{ct+d}$.

Concluimos então, que toda transformação linear invertível define uma transformação de Möbius.

Vale a pena notar que a composição de transformação de Möbius é uma transformação de Möbius, como podemos ver:

$$f_1(x) = \frac{a_1x + b_1}{c_1x + d_1}, \quad f_2(x) = \frac{a_2x + b_2}{c_2x + d_2}$$

então, temos sua composição $f_2 \circ f_1(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, onde

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}}_{\text{matriz de } T_2} \underbrace{\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}}_{\text{matriz de } T_1} = \begin{bmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ c_1a_2 + d_1c_2 & c_1b_2 + d_1d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Por último, se $y = f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow x = f^{-1}(y) = \frac{\alpha y + \beta}{\gamma y + \delta}$, temos que

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ podem ser encontrados da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1}$$

Grupos: um *grupo* é um conjunto G munido de uma operação binária \diamond . Para se qualificar como um grupo, (G, \diamond) tem que satisfazer 4 axiomas:

- Fechamento: Se $a \in G$ e $b \in G$, então, $a \diamond b \in G$;
- Associatividade: A operação \diamond é associativa, ou seja, para todo $a, b, c \in G$, $(a \diamond b) \diamond c = a \diamond (b \diamond c)$;
- Identidade: Existe um elemento $e \in G$ tal que $a \diamond e = e \diamond a = a$ para todo $a \in G$;
- Inverso: Para cada elemento $a \in G$ existe um $b \in G$ tal que $a \diamond b = b \diamond a = e$.

Um dado grupo G pode possuir um *subgrupo* H , que é um subconjunto de G , e que obedece a todos os axiomas de grupo sob a mesma operação binária de G . Portanto, é fácil de se ver que todo subgrupo H de G possui o elemento identidade de G e os inversos de quaisquer elementos nele.

Alguns grupos importantes que serão usados são:

- $GL(n, F)$ é o *general linear group*, ou o grupo linear geral. É o grupo de todas as matrizes quadradas de dimensão n , invertíveis, junto da operação de multiplicação de matrizes. Todas as entradas da matriz vem do corpo F ;
- $SL(n, F)$ é o *special linear group*, ou o grupo linear especial. É o subgrupo de $GL(n, F)$, formado pelas matrizes com determinante 1;
- $SO(n, F)$ é o *special orthogonal group*, ou o grupo ortogonal especial. É o subgrupo de $GL(n, F)$ tal que $SO(n, F) = \{A \in GL(n, F) : A^t A = A A^t = I\}$, ou seja, é o grupo de todas as matrizes ortogonais de dimensão n , sobre o corpo F ;

Um *homomorfismo* entre grupos $(G, \diamond), (H, \circ)$ é uma aplicação $\phi : G \rightarrow H$ tal que, dado $a, b \in G$, temos que $\phi(a \diamond b) = \phi(a) \circ \phi(b)$. O núcleo de ϕ é o subgrupo de G tal que $\{g \in G : \phi(g) = e_H\}$.

Como um exemplo de um homomorfismo, considere Ψ que mapeia o $GL(2, \mathbb{C})$ no grupo de transformações de Möbius com a operação de composição \circ , tal que:

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \mapsto \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

Ψ é um homomorfismo, pois:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 a_2 + b_1 c_2 & a_1 b_2 + b_1 d_2 \\ c_1 a_2 + d_1 c_2 & c_1 b_2 + d_1 d_2 \end{bmatrix}$$

Usando transformações de Möbius correspondentes as duas primeiras matrizes, temos:

$$f \circ g(x) = \frac{a_1 \left(\frac{a_2 x + b_2}{c_2 x + d_2} \right) + b_1}{c_1 \left(\frac{a_2 x + b_2}{c_2 x + d_2} \right) + d_1} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 c_2)x + (a_1 b_2 + b_1 d_2)}{(c_1 a_2 + d_1 c_2)x + (c_1 b_2 + d_1 d_2)}$$

O núcleo de Ψ são todas as matrizes múltiplas da identidade:

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \mapsto \frac{ax}{a} = x$$

Um outro exemplo interessante é o do grupo (H, \circ) das transformações de Möbius que preservam o círculo unitário. Quem, então, são as matrizes que induzem essas transformações? Vamos calculá-las.

Sabemos que 3 pontos definem um único círculo, então vamos primeiro encontrar uma transformação de Möbius $h : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \mapsto \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, tal que $h(\mathbb{R}) = S^1 = \{z \in \mathbb{C}; \|z\| = 1\}$. Vamos fazer isso com 3 pontos de $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$: $0, 1, \infty$, mapeando-os a $1, i, -1$, respectivamente.

$$h(0) = \frac{b}{d} = 1 \Rightarrow d = b$$

$$h(1) = \frac{a+b}{-a+b} = i \Rightarrow a+b = -ia+ib \Rightarrow (1+i)a = (-1+i)b \Rightarrow a = ib$$

$$h(\infty) = \frac{a}{c} = -1 \Rightarrow c = -a$$

Concluimos que $h(z) = \frac{az+b}{-az+b}$. Fazendo $a = i, b = 1$, temos $h(z) = \frac{iz+1}{-iz+1}$, então, podemos facilmente calcular h^{-1} usando sua forma matricial:

$$\begin{bmatrix} i & 1 \\ -i & 1 \end{bmatrix}^{(-1)} = \frac{1}{2i} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ i & i \end{bmatrix}$$

Note que multiplicar uma transformação de Möbius por uma constante não altera a transformação, portanto, temos $h^{-1}(z) = \frac{z-1}{iz+i}$.

Agora, precisamos de uma função $g(z)$ que preservem $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, logo qualquer transformação de Möbius com coeficientes $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ serve. Agora, podemos calcular a matriz da função f que preservam o círculo, pois $f = h \circ g \circ h^{-1}$.

$$\begin{aligned} \text{Matriz de } f &= \begin{bmatrix} i & 1 \\ -i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ i & i \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -b+c+(a+d)i & -b-c+(-a+d)i \\ b+c+(-a+d)i & b-c+(a+d)i \end{bmatrix} = M \end{aligned}$$

Podemos multiplicar M por uma constante sem mudar a transformação, então:

$$iM = \begin{bmatrix} -a-d+(-b+c)i & a-d+(-b-c)i \\ a-d+(b+c) & -a-d+(b-c)i \end{bmatrix}$$

Seja $\alpha = -a-d+(-b+c)i$, $\beta = a-d+(-b-c)i$ e $\widetilde{M} = iM$, temos agora $\widetilde{M} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$ com $\det(\widetilde{M}) = \|\alpha\|^2 - \|\beta\|^2 = 1$, que são todas as matrizes que preservam o disco unitário. Interessantemente, essas também são todas as matrizes de um outro grupo o qual não falamos: $SU(2, \mathbb{C})$, o grupo unitário especial (special unitary group), que é o grupo das matrizes complexas 2×2 com determinante 1.

Espaços tangentes: seja $S \subset \mathbb{R}^n$, ou $S \subset \mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$, e $p \in S$ o *espaço tangente a S em p* é o conjunto $T_p S$ de todos os vetores $v \in \mathbb{R}^n$, tal que exista uma curva diferenciável $\phi: [-1, 1] \mapsto \mathbb{R}^n$ com $\phi'(0) = v$. Entretanto, note que quem é realmente o espaço tangente a S em p é o subespaço afim $T_p S$ deslocado por p .

Álgebra de Lie : (a explicação seguinte não é sobre a álgebra de Lie em geral, mas somente da parte que vamos usar) Seja G um grupo de matrizes $n \times n$. Podemos considerar esse grupo de matrizes como uma superfície em \mathbb{R}^{n^2} , ou \mathbb{C}^{n^2} . Então, uma álgebra de Lie de G é o espaço tangente à G na identidade, denotado por $\mathfrak{g} = T_{Id} S$. Um fato importante é que se $g \in \mathfrak{g}$ então $e^g \in G$.

Vamos calcular um exemplo: qual é o espaço tangente a $SL(2, \mathbb{R}) = \{\text{matrizes com determinante} = 1\} \subset \mathbb{R}^4$ na identidade?

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$$

Então, $\det((x, y, z, t)) = xt - yz$, e definimos o gradiente da matriz como o gradiente de seu determinante, que será $\nabla(x, y, z, t) = (t, -z, -y, x)$. O gradiente na identidade é $(1, 0, 0, 1)$. Logo, a superfície tangente à $SL(2, \mathbb{R})$ em Id é $T_{Id}SL(2, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}; x + t = 2 \right\} = \left\{ Id + \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}; x + t = 0 \right\}$.

Um espaço tangente que precisaremos é o do $SU(2, \mathbb{C})$. As contas são similares às de cima, porém com a restrição adicional de que $x = \bar{t}$ e $y = \bar{z}$. Logo, temos $T_{Id}SU(2, \mathbb{C}) = \left\{ Id + \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{bmatrix}; \alpha + \bar{\alpha} = 0, \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\}$.

Conhecendo \mathfrak{g} , podemos encontrar os espaços tangentes à G em qualquer ponto $M \in G$:

$$T_M G = M \cdot \mathfrak{g} = \{M \cdot A; A \in \mathfrak{g}\} = \mathfrak{g} \cdot M$$

Voltando para a bicicleta, fixemos um tamanho para ela, digamos $l = 1$. É fácil de ver que existe uma transformação de Möbius que associa o ponto final e inicial de γ , com uma mudança de coordenadas, e que essa transformação M faz parte do grupo SU , já que preserva o círculo (ou seja, a bicicleta não aumenta nem diminui de tamanho).

5 Monodromia

Agora, queremos estudar um outro aspecto do problema em mãos. Suponha que possuímos um trecho do rastro da roda da frente $\Gamma(t)$ para $t \in [0, t_1]$. Sabendo a posição inicial da roda de trás $\gamma(0)$, conseguimos calcular a sua posição final $\gamma(t_1)$ resolvendo a equação diferencial explicitamente, quando possível, ou por métodos numéricos. Veja a Figura 3.

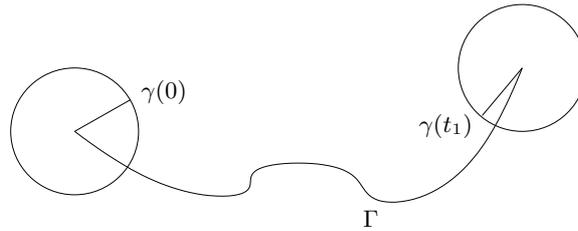


Figura 3: Monodromia

Aplicando uma simples mudança de coordenadas (translação seguida de homotetia), é possível considerar as posições iniciais e finais como pontos no

círculo unitário. Então, obtemos uma *aplicação de monodromia* do círculo unitário nele mesmo, que como Foote [F] descobriu, é uma transformação de Möbius restrita ao círculo unitário, ou seja, as matrizes de tais transformações de Möbius pertencem ao $SU(2, \mathbb{C})$.

Mais precisamente, conhecidos l e Γ , a trajetória da roda de trás será especificada pela seguinte trajetória no círculo unitário:

$$z(t) = \frac{\gamma(t) - \Gamma(t)}{|\gamma(t) - \Gamma(t)|}. \quad (6)$$

Seja ϕ_t a transformação que leva $z(0)$ em $z(t)$. Algumas propriedades gerais dessa definição são $\phi_0 = Id$ e $\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s$. Vamos encontrar uma equação diferencial que determina estas transformações ϕ_t . Antes disso, precisamos estudar melhor como transformações de Möbius gerais podem surgir como soluções de equações diferenciais no plano complexo.

Transformações de Möbius como soluções de E.D.O.'s: Considere a matriz $M_t = e^{tA}$, onde $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$; $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, tal que M_t seja a matriz da transformação de Möbius ϕ_t . Como era de se esperar, temos que $M_0 = Id$ e $M_{t+s} = M_t \cdot M_s$.

Com isso, suspeitamos que a família de transformações ϕ_t seja o fluxo de um campo de vetores X no plano complexo, ou seja, suspeitamos que exista um campo $X(z)$, tal que a solução da E.D.O. $z'(t) = X(z(t))$, com condição inicial $z(0) = z_0$, é dada por $z(t) = \phi_t(z_0)$.

Com efeito, temos que tal $X(z)$ existe e é dado por $\left. \frac{d\phi_t(z)}{dt} \right|_{t=0}$. Vamos primeiro calcular o campo de vetores de uma transformação de Möbius qualquer, para depois nos restringirmos a matrizes no $SU(2, \mathbb{C})$.

Para $t \approx 0$, temos que $e^{tA} \approx Id + t \cdot A$. Logo, ϕ_t é dado aproximadamente por

$$f(z) = \frac{(1 + ta)z + tb}{tcz + (1 + td)}$$

Calculando a derivada de $f(z)$ em relação a t em $t = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} & \left[\frac{az + b}{tcz + 1 + td} - \frac{((1 + ta)z + tb)(cz + d)}{(tcz + 1 + td)^2} \right]_{t=0} = \\ & az + b - z(cz + d) \Rightarrow \\ & X(z) = -cz^2 + (a - d)z + b \end{aligned} \quad (7)$$

Obtemos que $X(z)$ é o campo quadrático acima. Esta é, de fato, a expressão correta para $X(z)$, pois a diferença entre e^{tA} e $Id + t \cdot A$ é da ordem de t^2 e portanto não influencia quando $t \approx 0$.

De fato, é possível provar que *todo campo quadrático no plano complexo gera um fluxo de transformações de Möbius*. Mais precisamente, se X é um campo quadrático como em (7), e $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, então o fluxo gerado é formado pelas transformações de Möbius cujas matrizes são e^{tA} . Note que o campo X determina unicamente a matriz A a menos de somar um múltiplo da matriz identidade, e portanto a matriz e^{tA} fica unicamente determinada a menos de multiplicação por escalar (o que não influencia a transformação de Möbius).

Uma observação interessante é que as raízes da equação quadrática $X(z) = 0$ são os pontos fixos da família de transformações de Möbius ϕ_t .

Outra observação importante: dada uma família X_t de campos quadráticos dependendo do parâmetro temporal t , o fluxo da equação diferencial $z'(t) = X_t(z(t))$ é formado por transformações de Möbius. Porém, só sabemos explicitar as soluções se $X_t = X$ não depende de t (da maneira explicada acima).

Agora, iremos nos restringir às transformações de Möbius que preservam o círculo unitário, ou seja, $M_t \in SU(2, \mathbb{C}) = e^{su(2, \mathbb{C})}$, onde $su(2, \mathbb{C})$ é a álgebra de Lie de $SU(2, \mathbb{C})$ e que é formado pelas matrizes da seguinte forma, como já calculamos:

$$A = \begin{bmatrix} ia & b + ic \\ b - ic & -ia \end{bmatrix}; a, b, c \in \mathbb{R}$$

Podemos então calcular o campo gerado por A : $X(z) = -z^2(b - ic) + z(2ia) + b + ic$.

A figura 4 mostra o campo no plano complexo correspondente a $a = 2$, $b = 3$, $c = -1$; note que o campo é de fato tangente ao círculo unitário.

De volta à bicicleta: Por (1), temos

$$\frac{d\alpha(t)}{dt} = \kappa(t) - \frac{\sin(\alpha(t))}{l}.$$

Encontraremos uma família $X_t(z)$ de campos quadráticos, parametrizada pelo tempo t , de modo que as trajetórias $z(t)$ correspondendo a roda de trás (veja (6)) são soluções da equação diferencial

$$z'(t) = X_t(z(t)).$$

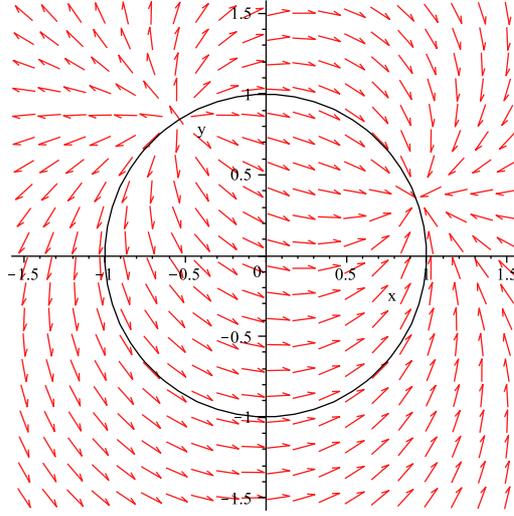


Figura 4: O campo $X(z) = -(3+i)z^2 + 4iz + 3 - i$.

Como $\Gamma(t)$ está parametrizada por comprimento de arco, segue que $\|\Gamma'(t)\| = 1 \Rightarrow \Gamma'(t) = e^{i\theta(t)}$, onde $\theta(t)$ é o ângulo que $\Gamma'(t)$ faz com o eixo real. Temos que $\kappa(t)$ está relacionado com $\theta(t)$, pois

$$|\kappa(t)| = \|\Gamma''(t)\| = \|i\theta'(t)e^{i\theta(t)}\| = |\theta'(t)|$$

De fato, $\kappa(t) = \theta'(t)$ é a curvatura com sinal.

Então, $\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} = e^{i\theta(t)+i\alpha(t)} = z(t)$. Seja $w = e^{i\alpha(t)} = e^{-i\theta(t)}z(t)$. Segue que

$$\sin(\alpha(t)) = \frac{w - w^{-1}}{2i} = \frac{e^{-i\theta(t)}z(t) - e^{i\theta(t)}z(t)^{-1}}{2i}$$

Temos

$$\begin{aligned} X_t(z(t)) &= z'(t) \\ &= \frac{d}{dt}e^{i\theta(t)+i\alpha(t)} \\ &= iz(t)\frac{d}{dt}(\theta(t) + \alpha(t)) \\ &= iz(t)[2\kappa(t) - l^{-1}\sin(\alpha(t))] \\ &= \frac{l^{-1}e^{i\theta(t)}}{2} + 2i\kappa(t)z(t) - \frac{l^{-1}e^{-i\theta(t)}}{2}z(t)^2 \end{aligned}$$

Isto nos motiva a definir a seguinte matriz em $su(2, \mathbb{C})$

$$A(t) = \begin{bmatrix} i\kappa(t) & \frac{l^{-1}e^{i\theta(t)}}{2} \\ \frac{l^{-1}e^{-i\theta(t)}}{2} & -i\kappa(t) \end{bmatrix}$$

Considere a E.D.O. matricial $M'(t) = A(t)M(t)$ com condição inicial $M(0) = Id$. Segue então que a solução $M(t)$ desta E.D.O. pertence à $SU(2, \mathbb{C})$. Em particular, a transformação de Möbius $\phi_t(z)$ associada a $M(t)$ preserva o círculo unitário e é exatamente a aplicação de monodromia no tempo t .

6 Simulações computacionais

Como este problema originou de uma situação real, é desejável que se possa visualizar melhor o objeto de estudo. Com isso em mente, elaboramos um programa de computador que permite ao usuário definir uma trajetória personalizada para a roda da frente e simular o caminho percorrido pela roda traseira. Além disso este programa é capaz de calcular e mostrar uma aproximação da monodromia associada ao caminho.

Ao passar para o mundo computacional nos deparamos com novos problemas, inerentes desta área: cálculo numérico, opções de implementação, eficiência da simulação, interface.

Linguagem de programação: Escolhemos Java como a linguagem deste projeto por possuir uma biblioteca padrão robusta que abrange várias de nossas necessidades, pela sua universalidade (um programa Java pode rodar em qualquer plataforma sem ter a necessidade de recompilar) e por ser segura, o Java cuida de certas responsabilidades como desalocação de memória sozinho. O preço a pagar por isso é uma performance um pouco reduzida, além da necessidade do usuário possuir Java instalado em seu computador.

Interpolação suave de pontos no plano para criar um caminho: O objetivo do programa era que o usuário pudesse criar, fácil e intuitivamente, um caminho para a roda da frente. Bastaria clicar para criar pontos e o caminho passaria por estes pontos. Logo, era necessário escolher uma forma de interpolar estes pontos num caminho suave.

Para isso utilizamos uma curva de Bézier cúbica por partes C , ou seja dado um caminho com n pontos $p_1, p_2, \dots, p_n \in \mathbb{R}^2$, temos curvas $\Gamma_i(t) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, onde $\Gamma_i(0) = p_i$ e $\Gamma_i(1) = p_{i+1} = \Gamma_{i+1}(0)$ dadas por $\Gamma_i(t) =$

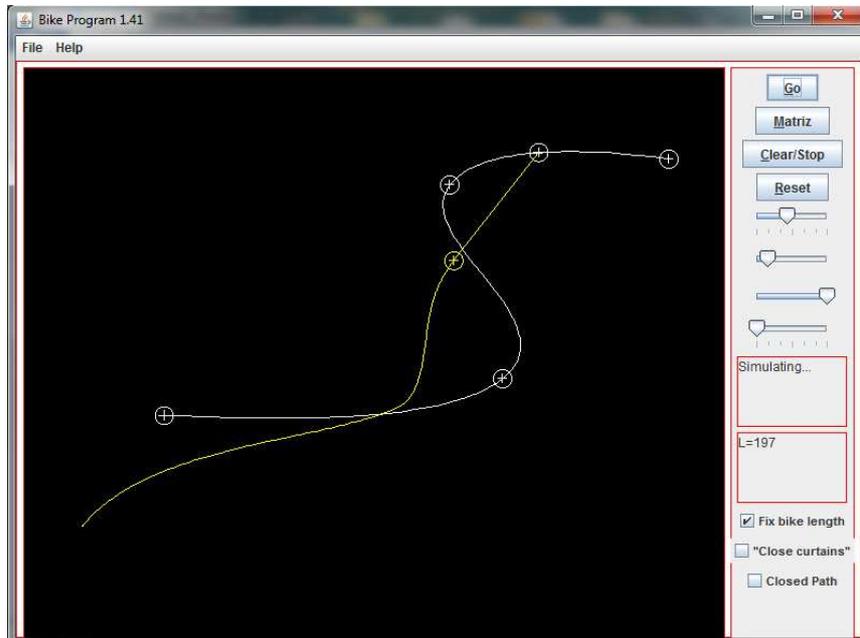


Figura 5: O programa feito em execução

(p_i, q_i) onde p_i e q_i são polinômios cúbicos. O uso de polinômios cúbicos com apenas dois pontos definidos, nos dá 2 graus de liberdade, que usamos para escolher a derivada da curva nos pontos iniciais e finais. Para que Γ possua derivada contínua temos que fazer com que as derivadas coincidam nos pontos p_i . Porém, ainda temos que fazer uma escolha arbitrária sobre a direção e o módulo de tal derivada nesses pontos. Depois de um pouco de tentativa e erro, chegamos no seguinte modelo: $\Gamma'_i(0) = (p_{i+1} - p_{i-1}) * Flex$ onde $Flex$ é uma constante determinada por um slider pelo usuário. Note que se $Flex = 0$ então cada Γ_i se degenera em uma reta.

Esse modelo é eficiente, intuitivo para o usuário e tem a vantagem de ser modular, ou seja, a curva Γ_i ligando p_i ate p_{i+1} depende apenas dos pontos p_{i-1}, p_i, p_{i+1} e p_{i+2} . Assim a mudança de um ponto só altera a curva localmente. Note que essa parametrização não é por comprimento de arco, o que é uma desvantagem.

Simulação: Uma vez tendo construído o caminho Γ e definido a posição inicial da roda traseira, necessitamos de um procedimento que simule a

bicicleta, e assim determine γ .

Para isso, particionamos Γ em varios pontos p_j , cuja quantidade pode ser escolhida pelo usuário no slider “Precisão da simulação”. Utilizamos uma estratégia simples para escolher os pontos: para determinar n pontos para cada Γ_i , simplesmente escolhemos $\Gamma_i(\frac{k}{n})$; $k = 0, 1, \dots, n - 1$. Como Γ não está parametrizado por comprimento de arco, estes pontos as vezes estão mais concentrados em certas partes arbitrárias da curva.

Uma vez escolhidos os pontos, andamos com a roda da frente de ponto em ponto, em pequenos passos e determinamos onde a roda de trás estará. Como os passos são pequenos, aproximamos esta pequena trajetória da roda de trás como uma reta. Ou seja, se B_i é a posição de B quando A está no ponto p_i , então para determinar B_{i+1} andamos com B na direção de p_{i+1} o suficiente para que $B_{i+1} - p_{i+1} = l$, logo, $B_{i+1} = B_i + (p_{i+1} - B_i)\lambda$ onde λ é determinado da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \|p_{i+1} - B_{i+1}\| &= l \\ \|p_{i+1} - B_i + (p_{i+1} - B_i)\lambda\| &= l \\ \|(p_{i+1} - B_i)(1 + \lambda)\| &= l \\ \lambda &= \frac{l}{p_{i+1} - B_i} - 1 \end{aligned}$$

Se a nossa partição é fina o suficiente, essa aproximação da equação diferencial é bem precisa, apesar da arbitrariedade comentada acima. Na verdade, mesmo com poucas divisões, já obtemos um resultado bastante satisfatório.

Monodromia: Outra função do programa é calcular a transformação de Möebius associada a um caminho dado e mostrar isso graficamente. Para isso utilizamos a mesma estratégia anterior, sabendo que a solução de $M'(t) = A \cdot M(t)$ se A é constante e $M(0) = Id$ é $M(t) = e^{tA}$. Como podemos considerar que a transformação do caminho todo é igual a composição de transformações de vários caminhos menores, então para uma partição fina de Γ em pontos $p_i = \Gamma(t_i)$; $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_n = L$ podemos encontrar $M(L)$ da seguinte forma: como $M(t_i + \Delta t_i) = e^{\Delta t_i A(t_i)} M(t_i)$, temos

$$M(L) = \prod e^{\Delta t_i A(t_i)}$$

Para fazer isso no computador, precisamos encontrar certas quantidades como a curvatura $\kappa(t)$ e $\theta(t)$, que são obtidas derivando o polinômio cúbico

com certas correções, pois a parametrização utilizada não é por comprimento de arco. Outro desafio foi exponenciar estas matrizes. Para isso utilizamos cálculo funcional, achando um polinômio de primeiro grau $P(x)$, tal que $P(\lambda_1) = e^{\lambda_1}$ e $P(\lambda_2) = e^{\lambda_2}$, onde λ_1 e λ_2 são os autovalores da matriz M que queremos exponenciar. Assim, temos que $P(M) = e^M$. Esse processo acabou sendo eficiente, pois é fácil encontrar tal polinômio, já que temos apenas dois autovalores de uma classe já conhecida de matrizes.

Finalmente, uma de nossas preocupações nesse estágio era de que as matrizes fossem muito próximas da identidade (exponenciais de matrizes muito próximas da matriz nula) e que isso acarretasse em grandes erros numéricos. Por isso, tentamos desenvolver alguns métodos alternativos de fazer o mesmo cálculo, porém, continuamos utilizando o método acima ao constatar que os erros numéricos eram de fato muito pequenos e completamente satisfatórios.

O programa ajuda a criar intuição por trás desse problema interessante e como subproduto ainda gera figuras bonitas e intrigantes. Abaixo estão os links para baixá-lo.

O executável .jar está disponível em:

<http://code.google.com/p/fredisrael/downloads/list>

O código fonte em:

<http://bit.ly/owesU3>

Referências

- [C] Cady, W.G. The circular tractrix. *American Mathematical Monthly*, v. 72, n. 10, p. 1065-1071, 1965.
- [F] Foote, Robert L. Geometry of the Prytz planimeter. *Rep. Math. Phys.* 42 (1998), 249–271.
- [LT] Levi, Mark; Tabachnikov, Serge. On bicycle tire tracks geometry, hatchet planimeter, Menzin's conjecture, and oscillation of unicycle tracks. *Experiment. Math.* 18 (2009), no. 2, 173–186.