DEFORMAÇÕES INFINITESIMAIS DE EQUAÇÔES DE EULER

Aluno: Thiago Barbosa Guerreiro
Orientador: George Svetlichny

A origem das perguntas

A mecânica clássica é de fundamental importância para as ciências físicas. Em suas formulações, diversas estruturas matemáticas tomam forma, em particular a teoria do cálculo variacional. A formulação de Lagrange é extremamente rica; não apenas é um esquema prático para a modelagem de sistemas complicados como também coloca várias outras questões à respeito dos formalismos usados para descrever as leis da natureza. Neste trabalho, estamos interessados em estudar esses formalismos.

Durante a iniciação científica, foi feita uma leitura do livro Mathematical Methods of Classical Mechanics, de V. I. Arnold [1]. Nesse período foram estudados diversos aspectos matemáticos da mecânica clássica, que inspiraram uma série de perguntas.

Uma dessas perguntas, já respondida, é o problema da lagrangiana inversa. Esse problema teve sua solução mais geral em [2]. Nesse artigo, os autores chegam às condições que uma equação diferencial deve satisfazer para que ela possa ser obtida através de um princípio variacional, e fornecem a forma da lagrangiana de tal princípio variacional. Essas são as chamadas condições de Anderson-Duchamp.

Outra questão interessante que também surgiu durante o estudo é, dada uma equação diferencial e sua solução, quando podemos deformar a equação e a sua solução tal que a equação resultante dessa deformação seja também uma equação proveniente de um princípio variacional? Que condições devem existir sobre a deformação para que a equação resultante dessa deformação seja obtida por uma lagrangiana? A resposta à essa pergunta é o principal tema abordado nesse projeto.

O problema

A fim de resolver esse problema, consideramos o caso mais simples. Em termos mais precisos, seja

$$y : R \to R$$
$$x \mapsto y(x)$$

Definimos o chamado jato de segunda ordem de $y(x)$ e o par $t\,(y)$

$$j^2(y) := (y(x), y'(x), y''(x))$$
$$t\,(y) := (x, j^2(y))$$

Dizemos que $y(x)$ é solução de uma equação diferencial T se

$$T \circ t\,(y) = 0$$

Nessa primeira etapa, recordamos [3] o cálculo das condições necessárias para que uma deformação infinitesimal

$$t\,(\tilde{y}) = (x + tx(x, y, y'), y(x) + th^0(x, y, y'), y'(x) + th^1(x, y, y'), y''(x) + th^2(x, y, y'))$$

também seja solução de T :

$$T \circ t\,(\tilde{y}) = 0 + O(t^2)$$

desconsiderando termos em t de ordem maior ou igual a dois, sendo T uma equação que pode ser obtida de um princípio variacional.

Com isso, obtivemos as condições sobre uma deformação infinitesimal no primeiro jato, o das soluções de T. O passo seguinte foi resolver o mesmo problema, mas dessa vez no segundo jato, o das equações T que são equações de Euler.

Nessa segunda parte incluímos a possibilidade de deformar a equação em si, e não apenas sua solução. Procuramos as condições sobre as deformações infinitesimais para que, dada uma equação diferencial que vem de uma equação de Euler, sua deformação também venha de uma equação de Euler. Para isso, usamos as condições encontradas em [2] para que uma equação diferencial venha de um princípio variacional, as já mencionadas condições de Anderson-Duchamp:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y''^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y''} = \frac{\partial T}{\partial y'} - y' \frac{\partial^2 T}{\partial y \partial y''} - y'' \frac{\partial^2 T}{\partial y' \partial y''}$$

Estudando as simetrias dessas condições para deformações que podem depender de até a derivada segunda, obtivemos as condições procuradas.

Para realizar essas contas desenvolvemos uma planilha no Maple, que simplificou muito o trabalho.

Conclusões

No final, o resultado obtido foram certas condições diferenciais sobre as deformações, que foram resolvidas e resultaram no grupo de simetrias das condições de Anderson-Duchamp para equações diferenciais lineares ordinárias de até segunda ordem.

Para o futuro breve, será resolvido o problema mais interessante e original, de quais dessas deformações das equações de Anderson-Duchamp são levantamentos de deformações no primeiro jato (o das soluções de T enquanto equações de Euler). Isso tornará possível responder por completo a pergunta que justifica a existência desse trabalho.

Referências

1 –Arnold, V. I. **Mathematical Methods of Classical Mechanics**. Graduate Texts in Math., Vol. 60, Springer-Verlag, New York and Berlin, 1978.

2 - I. M. Anderson, T. Duchamp, On the existence of global variational principles. **Amer. J. Math**. 102 (1980), 781-868.

3 – Olver, P.J. **Applications of Lie Groups to Differential Equations**. 2 .ed. , Springer, 1993.

4 - Otterson P., Svetlichny G., On derivative-dependent infinitesimal deformations of differentiable maps, **J. Differential Equations**, 36 (1980), 270-294.