TEOREMA DA UNIFORMIZAÇÃO DE RIEMANN

Aluno: Ricardo Lomba de Araujo Junior
Orientador: Flávio Erthal Abdenur

Introdução

O Teorema de Riemann é um dos mais importantes resultados obtidos em Análise Complexa, um ramo da Matemática que tem se mostrado profícuo desde sua criação, em fins do século XVIII. Além de resultados muito importantes para o próprio aprimoramento da Matemática, como o Teorema Fundamental da Álgebra (toda equação polinomial possuirá ao menos uma solução) e a curiosa relação $e^{i \$ p} = K\ 1$, a teoria de funções de variáveis complexas não pode ser qualificada de nada menor que essencial para áreas como a Física Quântica e Engenharia Elétrica.

Dentre matemáticos importantes que contribuíram para seu avanço, podemos citar alguns como Euler, Gauss, Cauchy, Abel, Weierstrass, Picard, Poincaré, Hilbert e Riemann, cujo Teorema é o foco deste projeto.

Objetivos

Estudar tópicos de Análise Complexa, visando especialmente o Teorema de Riemann. Desenvolver, a partir da literatura disponível, uma demonstração envolvendo passos tão simples quanto possível. Desenvolver o raciocínio lógico-matemático e a compreensão de funções de variável complexa do orientado.

Metodologia

O resultado estudado é usualmente apresentado em cursos de mestrado ou graduação em Matemática. Portanto, foi necessário que o orientado adquirisse familiaridade com a linguagem e o raciocínio matemático. Para tanto, foi coberto o conteúdo de um livro-texto para um curso universitário de Análise Real [1], sendo essa a primeira parte do projeto.

Durante a segunda etapa de desenvolvimento, foram realizados encontros regulares entre orientado e orientador, cobrindo o conteúdo de um curso introdutório em funções de uma variável complexa [2]. O conhecimento adquirido aplicado à resolução de exercícios e realização de exames, sedimentando a teoria estudada.

O Teorema de Riemann, entretanto, ainda era um objetivo distante. Para alcançá-lo, deu-se início a uma terceira etapa de desenvolvimento. O orientado, já com conhecimento suficiente para estudar o assunto sem a necessidade de aulas regulares, deveria apresentar semanalmente os resultados e teoremas estudados ao orientador. Desse modo, qualquer dúvida que o aluno tivesse, ficaria exposta no momento em que ele explicasse o assunto não compreendido.

Finalmente, foi possível estudar algumas demonstrações do Teorema e simplificar sua compreensão.

Devíamos mostrar que, se U for um conjunto aberto e conexo do plano complexo, cada ponto de z_o em U define um único biholomorfismo *f* entre U e o disco unitário centrado na origem **D** tal que $f(z_o) = 0$ e $f'(z_o) \in (0, + 8)$.

Para tal, consideraremos uma família de funções univalentes, ao invés de biholomorfas, de **U** em **D**, mas satisfazendo as demais propriedades relativas ao ponto z_o. A idéia é provar primeiramente que tal família é não-vazia. Depois, provamos que existe uma f biholomorfa nessa família e em seguida demonstra-se a unicidade.

Para tal, utilizamos alguns resultados conhecidos, como o Teorema de Montel e um corolário do Teorema de Hurwitz.

Conclusões

O estudo do Teorema de Riemann nos forneceu maior compreensão sobre os resultados obtidos ao considerarmos funções de variável complexa. Embora sejam feitas grandes restrições (holomorfia por si só já é uma condição forte), são formulados teoremas de valor inestimável. Foi possível também desenvolver uma compreensão mais apurada sobre equivalências conformes.

Como resultado final, obtivemos uma demonstração mais acessível desse resultado tão intrigante, além do desenvolvimento pessoal do orientando.

Referências

1 - LIMA, Elon Lages . **Análise Real, Volume I.** Projeto Euclides

2 – SOARES, Marcio. **Calculo de uma Variável Complexa**, SBM.

3 – NETO, Alcides Lins. **Introdução à Análise Complexa**, Projeto Euclides.