

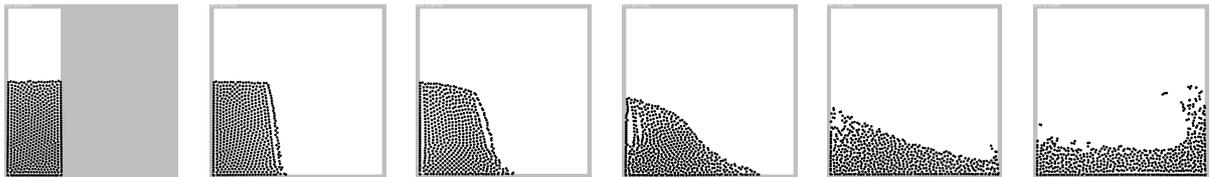
## SIMULAÇÃO DE FLUIDOS COM O MÉTODO SPH

**Aluno: Lucas von Haehling Braune**  
**Orientador: Thomas Lewiner**

### Introdução

O SPH é um método para a obtenção de soluções numéricas aproximadas para as equações da dinâmica de fluidos. Sua essência está na substituição do fluido por um conjunto de partículas. A sigla SPH vem de *Smoothed Particle Hydrodynamics*, que significa hidrodinâmica de partículas suavizada em Inglês.

Neste trabalho exploramos o SPH no contexto de fluidos descritos pelas equações de Euler (para uma dedução das equações da dinâmica dos fluidos, veja [2]). Foram escritos em C++ programas de simulação que rodam em tempo real. A primeira simulação feita foi a de um modelo simplificado de uma estrela. Esta configuração admite solução analítica e a densidade teórica foi comparada com a obtida pela simulação. A segunda simulação feita foi a de uma barragem que se quebra (veja seqüência de figuras abaixo). Neste segundo caso, olhamos para o problema do ponto de vista da computação gráfica, isto é, foi priorizada a plausibilidade visual do resultado.



Experimento de quebra de represa realizado durante a iniciação.

### O Método

Para resolver as equações de Euler numericamente, precisamos ser capazes de, dada a configuração do fluido em um determinado instante, calcular a aceleração em cada partícula naquele instante (veja [3]). As equações de Euler (uma equação para cada componente dos vetores envolvidos) são

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{g}.$$

Nesta equação, todas as quantidades (velocidade  $\vec{v}$ , densidade  $\rho$ , pressão  $p$  e aceleração da gravidade  $\vec{g}$ ) são funções da posição  $(x, y)$  e do tempo  $t$ . Que velocidade é  $\vec{v}$ ? Seria a velocidade local do fluido no ponto  $(x, y)$  no instante  $t$ ? Não! É a velocidade de um elemento de fluido que passe por este ponto neste instante. No caso do SPH, podemos entender “elemento de fluido” como “partícula”. Assim, para calcular as acelerações das partículas, precisamos ter aproximações para termos como  $\nabla p$  e  $\rho$ .

O SPH faz estas aproximações conforme as seguintes relações:

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{\Omega} f(x') \delta(x - x') dx' \approx \int_{\Omega} f(x') W_h(x - x') dx' \approx \\ &\approx \sum_j f_j W_h(x - x_j) \Delta V_j = \sum_j f_j W_h(x - x_j) \frac{m_j}{\rho_j}. \end{aligned}$$

Nestas equações,  $f(x)$  uma função da posição e  $\Omega$  é o volume ocupado pelo fluido.  $W_h$  é tomado como uma função suave que é parecida com delta de Dirac de tal forma que a

primeira relação  $\approx$  se torne uma igualdade no limite  $h \rightarrow 0$ . A segunda relação  $\approx$  é a aproximação numérica da integral por uma soma. Esta soma é sobre todas as partículas da simulação (em virtude da natureza de  $W_h$ , na prática a soma só envolve as partículas próximas do ponto  $x$ ) e  $f_j$ ,  $m_j$  e  $\rho_j$  são o valor da função, a massa e a densidade da partícula  $j$ .

Chegamos à expressão usada em nossas simulações para aproximar a densidade em um determinado ponto do fluido:  $\rho(x) = \sum_j m_j W_h(x - x_j)$ . A única quantidade que à princípio não conhecemos nesta equação é  $\rho(x)$ , uma vez que a cada partícula é inicialmente atribuída uma massa que não muda. Aproximações do mesmo tipo são feitas ao termo  $-(\nabla p)/\rho$ , de forma que a equação de movimento para uma partícula  $a$  do fluido é

$$\frac{d\vec{v}_a}{dt} = \vec{g} - \sum_b m_b \left( \frac{P_a}{\rho_a^2} + \frac{P_b}{\rho_b^2} \right) \nabla W_h(x_a - x_b).$$

A princípio, se supusermos conhecida a gravidade, conhecemos todos os termos da expressão da direita, excetuando-se as pressões nas partículas  $a$  e  $b$ . Esta pressão é calculada como uma função da densidade. Que função (equação de estado) deve ser usada depende do problema considerado. A expressão acima (somada de um termo de amortecimento que gera estabilidade numérica) foi a usada em nossas simulações.

### Conclusões

O método gerou resultados realistas, mas a etapa de pré-processamento se mostrou delicada. Ajustar os parâmetros (no nosso caso simples, isso quis dizer ajustar a função que calcula a pressão) de forma que a simulação funcionasse foi uma tarefa difícil.

A trajetória de aprendizado do aluno foi a que segue. Estudou-se a solução de equações diferenciais com o computador [3] e a formulação matemática da dinâmica de fluidos [2]. Estudou-se então detalhes da implementação do simulador [4] e [5]. Aí surgiu a necessidade de aprender a linguagem C++. Finalmente, procedeu-se como em [1] e [5] e escreveu-se o simulador.

### Referências

- 1 - MONAGHAN, J. J. Smoothed Particle Hydrodynamics. **Reports on Progress in Physics**, n. 68, p. 1703-1759, 2005.
- 2 - ALBUQUERQUE MACÊDO JR., I. J. **On the simulation of fluids for computer graphics**. Rio de Janeiro, 2007. 97 p. Dissertação de Mestrado (Matemática com Ênfase em Computação Gráfica) - Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada.
- 3 - GOLUB, G. H., ORTEGA, J. M. **Scientific Computing and Differential Equations: Na Introduction to Numerical Methods**. San Diego, California: Academic Press, 1992, 337p.
- 4 - Notas do curso de modelagem baseada em física apresentado no SIGGRAPH 2001. Foram disponibilizadas pela PIXAR. <http://www.pixar.com/companyinfo/research/pbm2001/>
- 5 - PAIVA NETO, A. **Uma abordagem Lagrangeana para simulação de escoamentos de fluidos viscoplásticos e multifásicos**. Rio de Janeiro, 2007. 91 p. Tese de Doutorado – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.
- 6 - MONAGHAN, J. J., THOMPSON, M. C., HOURIGAN, K. **Simulation of Free Surface Flows with SPH**, ASME Symposium on Computational Methods in Fluid Dynamics, Lake Tahoe June 19-23, 1994.