

TEORIA ERGÓDICA, SISTEMAS DINÂMICOS E MEDIDAS INVARIANTES

Aluno: Juliana Arcoverde V. L. Ribeiro
Orientador: Lorenzo Justiniano Díaz Casado

Introdução

A Teoria dos Sistemas Dinâmicos, ou mais exatamente Teoria Ergódica, tem sido aplicada ao longo dos últimos anos de diversas maneiras, podendo ser utilizada para resolver problemas tanto de Teoria dos Números e Topologia quanto outros que envolvem aplicações em Geometria Diferencial e Probabilidade. Por sua vez, através do estudo do comportamento assintótico das órbitas de transformações (endomorfismos, difeomorfismos e fluxos), os métodos de Sistemas Dinâmicos também têm sido amplamente utilizados, podendo explicar fenômenos complexos nas diversas ciências, como: Química (reações químicas, processos industriais), Física (turbulência, transição de fase, ótica), Biologia (competição de espécies, neurobiologia), Economia (modelos de crescimento econômico, mercado financeiro) e muitas outras. O presente projeto visa uma compreensão gradativa destes tópicos e dos diferentes conceitos neles envolvidos, iniciando pela observância dos principais resultados da Teoria da Medida.

Objetivos

O presente estudo teve como principal objetivo a compreensão de importantes conceitos, teoremas e problemas envolvendo sistemas dinâmicos e sua correlação com a Teoria Ergódica. Para tal, observamos alguns dos principais resultados da Teoria da Medida e exemplos de medidas invariantes, como, por exemplo, a Transformação de Gauss. Estudamos também o Teorema de Recorrência de Poincaré.

Metodologia

Iniciamos o estudo revendo a Teoria da Medida e alguns de seus principais elementos e resultados. Foram introduzidos alguns importantes conceitos, como noções de álgebra e s -álgebra de conjuntos e técnicas para sua construção, espaços mensuráveis e espaços de medidas. Nesse ponto, foram analisadas duas importantes classes de medidas: medidas de Lebesgue em espaços Euclidianos e medidas produto em espaço de sequências, além do Teorema de Radon-Nikodym.

Em uma segunda etapa, foi estudado o Teorema de Recorrência de Poincaré e os principais conceitos nele envolvidos, tais como as condições necessárias para que um ponto seja considerado recorrente. Estudamos tanto a versão mensurável, utilizando medidas μ definidas na s -álgebra de Borel de um espaço M , quanto a versão topológica, empregando o conceito de recorrência em uma vizinhança. Mais adiante, estendemos esses dois enunciados também para certos casos de medidas infinitas.

Prosseguindo com o estudo, trabalhamos alguns exemplos de medidas invariantes, como Expansão Decimal, Sistemas Conservativos, Deslocamentos (“shifts”) de Bernoulli e Transformação de Gauss. Neste último, analisando sua ergodicidade, concluímos que a transformação de Gauss é ergódica com relação à medida de Gauss μ .

Conclusões

O presente estudo permitiu uma maior compreensão de alguns importantes conceitos, teoremas e problemas envolvendo sistemas dinâmicos e de sua correlação com a Teoria Ergódica. Esse novo conhecimento possibilitou, por exemplo, o entendimento de propriedades sobre a distribuição de dígitos na expansão de frações contínuas de quase todo número do intervalo $[0,1)$, que é um conjunto de medida Gauss total. Utilizando as conclusões sobre a ergodicidade da Transformação de Gauss, o Teorema de Birkhoff e os conceitos das medidas de Gauss e Lebesgue, foi possível obter a frequência com que um determinado número natural aparece na sequência de quocientes de quase todo número real x .

Referências

1 – DÍAZ, Lorenzo J. ; JORGE, Danielle de Rezende. **Uma introdução aos Sistemas Dinâmicos via Frações Contínuas**. 26º Colóquio Brasileiro de Matemática. IMPA, 2007. 211 p.

2 – OLIVEIRA, Krerley. **Um primeiro curso em Teoria Ergódica e aplicações**. 97 p