

# A MÉTRICA DE HILBERT E APLICAÇÕES

**Alunos: Frederico Banchik Israel e Paulo Najberg Orenstein**  
**Orientador: Jairo Bochi**

## Introdução

Estudamos a métrica de Hilbert, um assunto clássico em geometria projetiva. Elaboramos um texto que introduz esse conceito de maneira elementar. Além disso, desenvolvemos um software que permite a sua visualização. Dentre as aplicações da métrica de Hilbert, apresentamos uma prova de um importante resultado de álgebra linear, o teorema de Perron-Frobenius, que por sua vez dá fundamento teórico para o algoritmo básico (PageRank) do Google.

## Objetivos

Elaborar um texto expositório sobre a métrica de Hilbert em linguagem elementar, contendo aplicações. Desenvolver um software que permita a visualização da métrica de Hilbert em um polígono convexo qualquer.

## Trabalho Escrito

A métrica de Hilbert é um instrumento clássico em geometria projetiva, vide [3]. Ela é uma função-distância definida em qualquer subconjunto aberto convexo limitado  $K$  do espaço euclidiano, que o torna um espaço métrico não-compacto e completo. Quando  $K$  é um disco, a métrica de Hilbert coincide com aquela do modelo de Klein para a geometria hiperbólica. Cabe apontar que a métrica de Hilbert também pode ser definida e aplicada em espaços de dimensão infinita (vide [1]), porém isso estaria além do caráter elementar deste trabalho.

O texto que elaboramos usa um mínimo de pré-requisitos, e contém os seguintes tópicos:

1. Preliminares: Espaços métricos; teorema do ponto fixo de Banach. Convexidade.
2. Definição da métrica de Hilbert no caso unidimensional; invariância por transformações projetivas.
3. Definição da métrica de Hilbert em dimensão qualquer; prova da desigualdade triangular; invariância por transformações lineares.
4. Cálculo de alguns casos específicos: o simplexo standard, a bola redonda.
5. Comparação entre métricas de Hilbert para convexos encaixados: a desigualdade de Birkhoff (vide [1]). Aplicação: A propriedade de contração para transformações lineares.
6. O teorema de Perron-Frobenius para matrizes estocásticas. Aplicações a cadeias de Markov; o algoritmo PageRank do Google (vide [2]).

O texto contém também figuras elaboradas através do software, e foi escrito em LaTeX.

## Software

Elaboramos um software em C++ que permite ao usuário definir um polígono convexo qualquer, e visualizar as bolas na métrica de Hilbert, tendo opção de escolher o centro com o mouse e o também o raio.

Os arquivos executáveis foram compilados para Windows e Linux.

## Conclusões

O estudo serviu como introdução a matemática rigorosa e abstrata. Ao mesmo tempo, mantivemos em vista aplicações concretas.

Esperamos que o texto que desenvolvemos seja útil para outros estudantes, visto que não conhecemos uma referência sobre o assunto em linguagem moderna que não exija pré-requisitos sofisticados. O software complementa o texto, pois ajuda a obter um *feeling* sobre a métrica de Hilbert.

O texto e o software ficarão disponíveis para download na página do Departamento de Matemática.

## Referências

- 1 - BIRKHOFF, Garrett. Extensions of Jentzsch's theorem. **Trans. Amer. Math. Soc.**, v.85, p. 219-227, 1957.
- 2 - BRIN, Sergey; PAGE, Lawrence. The anatomy of a large-scale hypertextual Web search engine. **Computer Networks and ISDN Systems**, v. 30, p. 107-117, 1998.
- 3 - BUSEMANN, Herbert,; KELLY, Paul Joseph. **Projective geometry and projective metrics**. New York: Academic Press, 1953. 332 p.