ESTUDO DE MODELOS DINÂMICOS LINEARES E NÃO LINEARES

Aluna: Roberta de Queiroz Lima
Orientador: Rubens Sampaio Filho

Introdução

Este trabalho desenvolve um estudo em modelos dinâmicos lineares e não lineares. Foram analisados modelos para vibrações paramétricas (Equação de Mathieu-Hill), vibrações não lineares com amortecimento linear (Equação de Duffing) e vibrações com amortecimento não linear (Equação de Van der Pol). Gráficos traçados em *Matlab* mostram diagramas de fase, respostas dinâmicas e o fenômeno de ressonância para os sistemas tratados, permitindo análise de condições de estabilidade e instabilidade dos modelos.

Vibrações Paramétricas

Vibrações paramétricas, com um grau de liberdade, são descritas por equações diferenciais homogêneas, nas quais há variação dos coeficientes com o tempo. Em termos matemáticos, utiliza-se a equação de Mathieu-Hill: $\frac{d^2y}{d\tau^2} + (\lambda + \kappa \cos \tau) =$ 0, onde **?** e **?** são constantes.

A estabilidade de um oscilador paramétrico depende dos valores assumidos por **?** e **k** e não das condições iniciais de movimento e velocidade. Os valores de **?** e **k** para os quais o oscilador é estável e instável podem ser representadas em um plano **?k**.

As fronteiras entre as zonas estáveis e instáveis nesse plano em geral são expressas por equações muitos simples, funções do tipo **?** = **?**(**?**). A obtenção das expressões para estas curvas é feita através do método das perturbações. Verificamos que, por exemplo, para **?** = 0,1 e **k** = 0,1, o sistema apresenta um comportamento periódico. Mantendo o valor de **?** constante e aumentando o valor de **k**, o sistema se comporta de forma instável e o diagrama de fase assume a forma de um foco instável.

Vibrações Não Lineares com Amortecimento Linear

Muitos problemas de dinâmica não linear podem ser modelados pela equação de Duffing: $\ddot{x} + c\dot{x} + \omega_n{}^2 x \pm \alpha x^3 = F\cos[(\omega)]t)$, onde: **?** $_{\mathbf{n}}$ é a freqüência natural, ***c*** o amortecimento, ***a*** um termo de não linearidade e ***F*** o forçamento.

O gráfico da figura (1) mostra a resposta de um sistema em função da razão entre a freqüência natural do sistema a freqüência do forçamento para valores positivos de ***a***.

O estudo da estabilidade da equação de Duffing foi feito através da equação de energia potencial (*V*) para o movimento com amortecimento linear e sem forçamento externo. Os pontos de estabilidade ocorrem quando a variação instantânea da energia potencial no tempo é zero, ou seja, $\frac{dV}{dt} = 0$. O sistema governado pela equação de duffing apresenta uma resposta dinâmica fortemente dependente das condições iniciais de velocidade e deslocamento, revelando características de caos.

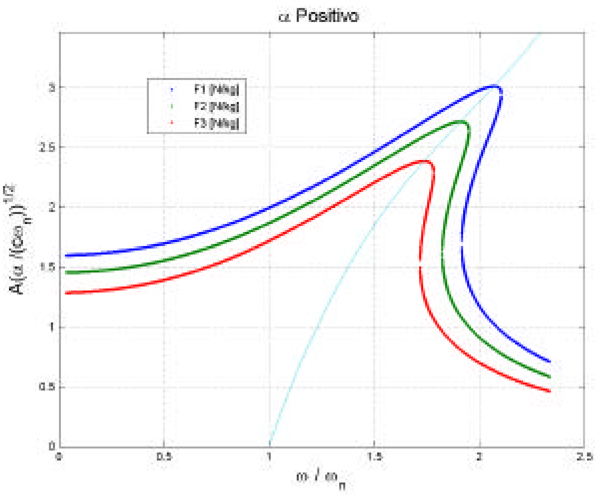

Figura 1 - Ressonância em Duffing para **a** positivo

Vibrações com Amortecimento Não Linear

A principal característica dos sistemas modelados dinamicamente pela equação de Van de Pol é a existência de um ciclo limite para suas trajetórias de movimento. Independentemente da amplitude inicial de movimento desses sistemas, o diagrama de fase sempre tende para uma única curva que corresponde à solução periódica quando o tempo tende ao infinito.

A equação diferencial não linear de Van der Pol é: $\ddot{x} - \alpha(1 - x^2)\dot{x} + x = 0$. Nessa equação o termo $\alpha(1 - x^2)$ introduz um amortecimento que assume valores negativos para pequenas amplitudes de movimento, caracterizando o sistema como acreativo, e assume valores positivos para grandes amplitudes de movimento, caracterizando o sistema como dissipativo.

Conclusões

Modelos não lineares e modelos de vibrações paramétricas permitem considerar efeitos de um maior número de parâmetros relevantes a sistemas mecânicos, reduzindo o número de hipóteses simplificadoras em um modelo matemático.

O estudo dos modelos dinâmicos permitiu maior entendimento das condições de estabilidade de um oscilador sujeito a dinâmica de movimento linear e não linear. Foram simuladas inúmeras condições operacionais para avaliação de como parâmetros externos ou da própria estrutura afetam seu comportamento.

Verificou-se que em vibrações paramétricas a estabilidade está relacionada com os valores assumidos por constantes na equação da dinâmica de movimento, já quando se introduz uma não linearidade, obtendo-se a equação de duffing, por exemplo, as condições de estabilidade são fortemente dependentes das condições iniciais de velocidade e deslocamento.

Referências

[1] CARTMELL, M. **Introduction to Linear, Parametric and Nonlinear Vibrations**. Londres: Chapman and Hall, 1990. 260p.

[2] THOMPSON, J.M.T., STEWARD, H.B. **Nonlinear Dynamics and Chaos**. Chichester, England: John Wiley & Sons Ltd, 1986. 376p.

[3] RAO, S.S. **Mechanical Vibrations**. 3.ed. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, 1995. 920p.