SISTEMAS CAÓTICOS

Aluna: Simone Bochner de Araújo
Orientadora: Celia Beatriz Anteneodo

Introdução

Uma grande variedade de sistemas apresenta comportamentos complicados, irregulares, imprevisíveis, em maior ou menor grau, a exemplo do clima, de certos circuitos elétricos e reações químicas, ou inclusive do aparentemente regular sistema solar [1].

Com efeito, não-linearidades, presentes em quase todo sistema, podem tornar a sua evolução não trivial. Em particular, o caos é um dos comportamentos que podem ser observados em sistemas não-lineares para determinados valores dos parâmetros. Em tais casos, uma pequena perturbação nas condições iniciais pode resultar numa grande diferença em tempos posteriores. Trajetórias inicialmente muito próximas divergem exponencialmente. Esta é a denominada "sensibilidade às condições iniciais" ou, mais popularmente,"efeito borboleta", que caracteriza o comportamento caótico de alguns sistemas não-lineares tornando-os imprevisíveis.

Assim, mesmo sistemas que possam ser modelados satisfatoriamente por equações deterministas, ou seja, sem ruídos ou incertezas explícitas, podem evoluir de forma aparentemente aleatória e irregular. Na presença de caos, a própria incerteza nas condições iniciais associada à precisão finita de qualquer medição impede prever a evolução futura. Portanto, a identificação dos regimes caóticos da dinâmica e a quantificação do grau de caoticidade são essenciais para estabelecer os limites dentro dos quais é possível efetuar predições [2-5].

Objetivos

Compreender os conceitos básicos do caos determinista, estudando modelos simples, de tempo discreto e contínuo. Aplicar essas idéias para pesquisar sistemas realistas, a exemplo de circuitos elétricos com elementos não-lineares. O projeto visa também abordar aplicações de interesse prático, tais como a sincronização e o controle de caos ou a criptografia para comunicações seguras [6].

Metodologia

As complicações matemáticas dos sistemas não-lineares fazem com que o uso de técnicas computacionais sejam valiosas, tanto para efetuar simulações ou evoluir numericamente as equações de movimento, quanto para visualizar os resultados.

Paradigmas matematicamente simples, a exemplo do mapa logístico, são apropriados para investigar o conceito de caos. O mapa logístico, $x_{n+1} = \mu\, x_n\, (1- x_n)$, com $\mu \in [0,4]$ e $x_0 \in [0,1]$, foi originalmente introduzido como um modelo para sistemas ecológicos. Para cada valor de μ, as trajetórias são construídas numericamente iterando-se o mapa, a partir da condição inicial x_0.

A divergência exponencial das condições iniciais (medida pelos expoentes de Lyapunov) e aspectos fractais do mapa podem ser estudados numericamente usando programas de computador (e.g., Excel) que permitem efetuar cálculos numéricos e gerar gráficos. A relativa simplicidade do mapa logístico permite ainda complementar os resultados numéricos com cálculos analíticos.

Para diversos valores do parâmetro μ estudamos a cascata de bifurcações que leva ao caos e obtivemos o grau de caoticidade mediante o cálculo numérico do expoente de Lyapunov, a taxa de crescimento exponencial da distância entre trajetórias próximas.

Na próxima etapa será implementado no laboratório um sistema com regimes caóticos: um circuito R-L-diodo com fonte de corrente alternada. O diodo é o elemento que introduz a não-linearidade que permite o surgimento de comportamentos complexos. O circuito também pode ser simulado computacionalmente por integração numérica da equação diferencial para a corrente na malha segundo a lei de Kirchhoff. Neste sistema será observado o colapso da orbita periódica dada pela fonte e o surgimento de caos por duplicação de período, em analogia ao fenômeno já estudado no mapa logístico.

Conclusões

O estudo do mapa logístico permitiu a compreensão das características básicas do comportamento caótico: forte sensibilidade às condições iniciais, aspectos fractais e repetição de operações de estica e dobra do espaço de fase como mecanismo dinâmico para gerar caos.

Como o projeto encontra-se na fase inicial (começou em abril de 2008) ainda não foi completado o estudo experimental nem a pesquisa de aplicações práticas.

Referências

1 – LASKAR, J, A numerical experiment on the chaotic behaviour of the Solar System, **Nature**, v. 338, p237–238. 1989.

2 - NUSSENZVEIG, H.M. (org.). **Complexidade e caos**. Ed. UFRJ/COPEA, 1999.

3 - FIEDLER-FERRARA, N. PRADO, C.P.C. **Caos uma introdução**. Ed. E. Blücher, 1994.

4 - LAM, L. **Nonlinear physics for beginners**. World Scientific, 1990.

5 - HILBORN, R.C. **Chaos and nonlinear dynamics**. Ed. Oxford University Press. 1994.

6 - BAPTISTA, M. S. Cryptography with chaos. **Phys. Lett. A**, v. 240, n.1-2, p50-54. 1998.