

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA  
DO RIO DE JANEIRO



*DEM - Departamento de Engenharia Mecânica*

# **Estudo de Modelos Dinâmicos Lineares e Não Lineares**

**Aluna: Roberta de Queiroz Lima**

**Orientador: Rubens Sampaio Filho**



**Rio de Janeiro, Junho de 2008**

## **Resumo**

Este trabalho desenvolve uma pesquisa em modelos dinâmicos lineares e não lineares.

Foram estudados modelos para: vibrações paramétricas (Equação de Mathieu-Hill), vibrações não lineares com amortecimento linear (Equação de Duffing) e vibrações com amortecimento não linear (Equação de Van der Pol). Gráficos traçados em *Matlab* mostram diagramas de fase, respostas dinâmicas e o fenômeno de ressonância para os sistemas tratados, permitindo dessa forma uma análise de condições de estabilidade e instabilidade dos modelos.

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>ii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Vibrações Paramétricas</b>	<b>3</b>
2.1 A Equação de Mathieu-Hill . . . . .	4
2.2 Exemplo: Pêndulo com Ponto de Suspensão Oscilante . . . . .	6
2.3 Análise de Estabilidade das Vibrações Paramétricas . . . . .	7
2.4 Resultados: Resposta Dinâmica e Diagrama de Fase . . . . .	12
<b>3 Vibrações Não Lineares com Amortecimento Linear</b>	<b>17</b>
3.1 A Equação de Duffing . . . . .	17
3.2 Análise de Estabilidade da Equação de Duffing . . . . .	19
<b>4 Vibrações com Amortecimento Não Linear</b>	<b>27</b>
4.1 A Equação de Van der Pol . . . . .	27
4.2 Análise de Estabilidade da Equação de Van der Pol . . . . .	27
<b>5 Conclusões</b>	<b>32</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>32</b>

# Lista de Figuras

2.1	Sistemas sujeitos à vibração paramétrica. . . . .	3
2.2	Pêndulo de massa $m$ com ponto de suspensão oscilante. . . . .	6
2.3	Regiões estáveis e instáveis de um oscilador governado pela equação de Mathieu. . . . .	8
2.4	Diagrama de equilíbrio para regiões próximas a origem do plano $\lambda\kappa$ . . . . .	12
2.5	Diagrama de fase para sistema com $\lambda = 0,1$ e $\kappa = 0,1$ . . . . .	13
2.6	Resposta dinâmica para sistema com $\lambda = 0,1$ e $\kappa = 0,1$ . . . . .	13
2.7	Diagrama de fase para sistema com $\lambda = 0,1$ e $\kappa = 0,9$ . . . . .	14
2.8	Resposta dinâmica para sistema com $\lambda = 0,1$ e $\kappa = 0,9$ . . . . .	14
2.9	Diagrama de fase para sistema com $\lambda = -0,1$ e $\kappa = 0,5$ . . . . .	15
2.10	Resposta dinâmica para sistema com $\lambda = -0,1$ e $\kappa = 0,5$ . . . . .	15
2.11	Diagrama de fase para sistema com $\lambda = -0,1$ e $\kappa = 1,0$ . . . . .	16
2.12	Resposta dinâmica para sistema com $\lambda = -0,1$ e $\kappa = 1,0$ . . . . .	16
3.1	Resonância em Duffing com $\alpha$ positivo . . . . .	20
3.2	Resonância em Duffing com $\alpha$ negativo . . . . .	21
3.3	Resonância em Duffing com $\alpha$ zero . . . . .	22
3.4	Energia Potencial - Pontos de Estabilidade, parâmetros usados: $\omega_n^2 = 0.5$ e $\alpha = 0.5$ . . . . .	23
3.5	Diagrama de fase para sistema com $x_0 = 1.0$ e $\dot{x}_0 = 0.52$ . . . . .	24
3.6	Diagrama de fase para sistema com $x_0 = 1.0$ e $\dot{x}_0 = 0.54$ . . . . .	25
3.7	Diagrama de fase para sistema com $x_0 = 1.0$ e $\dot{x}_0 = 0.57$ . . . . .	26
4.1	Diagrama de fase para sistema com $x_0 = 0.001$ e $\dot{x}_0 = 0$ . . . . .	28
4.2	Resposta dinâmica para sistema com $x_0 = 0.001$ e $\dot{x}_0 = 0$ . . . . .	29
4.3	Diagrama de fase para sistema com $x_0 = 5.0$ e $\dot{x}_0 = 0$ . . . . .	30
4.4	Resposta dinâmica para sistema com $x_0 = 5.0$ e $\dot{x}_0 = 0$ . . . . .	31

# Capítulo 1

## Introdução

A engenharia busca a cada dia melhores soluções para os problemas, necessidades e desejos da humanidade. Porém, o desenvolvimento de produtos tecnologicamente mais avançados requer soluções inovadoras em todos os segmentos envolvidos, como por exemplo, materiais inovadores e logísticas de transporte e produção.

A obtenção de soluções inovadoras induz a desafios no contexto da engenharia que se estendem a todos os segmentos relacionados com o projeto, desenvolvimento e produção.

Durante as fases de desenvolvimento é vital que o comportamento dinâmico de um novo produto seja conhecido. O desconhecimento dos níveis e características da resposta dinâmica pode levar a níveis de tensões nos materiais não previstos, gerando assim possibilidade de falha. Pode também ocasionar falha estrutural devido à aplicação de carregamentos repetitivos, os quais estão diretamente envolvidos com fadiga, propagação de trincas e acumulação de danos estruturais.

A análise da dinâmica clássica baseada na teoria linear foi durante muito tempo considerada suficiente para a compreensão das características vibratórias de praticamente todas as estruturas projetadas. Entretanto, com a modernização das estruturas e utilização de materiais inovadores com maior grau de flexibilidade, as não linearidades tornam-se mais ativas, provocando o surgimento de vibrações com características não lineares. Nestes casos, a análise dinâmica linear deve ser considerada apenas como uma fase inicial de projeto.

A dinâmica não linear passou a ser frequentemente utilizada na modelagem de sistemas mecânicos. Apesar da maior dificuldade de solução das equações envolvidas na abordagem não linear, seus modelos permitem considerar os efeitos de um maior número de parâmetros relevantes ao projeto, reduzindo o número de hipóteses simplificadoras.

Em adição à presença de não linearidades, as estruturas quando em operação podem sofrer a ação de excitações de naturezas diferentes. As excitações podem ser classificadas segundo a maneira que aparecem nas equações de movimento. Dessa forma, podem ser externas ao sistema ou paramétricas.

A presença de não linearidades juntamente com excitações paramétricas compõe um cenário dinâmico complexo. Dentro deste cenário, vibrações com características especiais podem se desenvolver e conseqüentemente comprometer a segurança, prejudicar a operação ou ainda reduzir o desempenho de um novo produto. Para todos estes exemplos é fundamental que os níveis vibratórios sejam mantidos sob controle. Isso torna necessário o conhecimento e estudo dos mecanismos que provocam estas vibrações, assim como as variáveis que o afetam.

O estudo de modelos matemáticos para a dinâmica dos sistemas mecânicos é essencial para seu entendimento. A partir dos modelos pode-se simular inúmeras condições operacionais ou avaliar como parâmetros externos ou da própria estrutura afetam seu comportamento dinâmico.

Este trabalho dedicou-se ao estudo de três modelos dinâmicos: vibrações paramétricas (equação de Mathieu-Hill), vibrações não lineares com amortecimento linear (Equação de Duffing) e vibrações com amortecimento não linear (Equação de Van der Pol). Estudou-se a resposta dinâmica e diagrama de fase, avaliando-se as condições de estabilidade e instabilidade dos sistemas. Alguns gráficos encontrados na literatura foram refeitos para aprofundamento do entendimento desses modelos.

## Capítulo 2

# Vibrações Paramétricas

Quando um sistema estrutural sofre a ação de uma excitação do tipo paramétrica, ocorre uma modificação variante com o tempo em algum parâmetro do sistema. Neste caso, a vibração proveniente deste tipo de vibração é dita vibração paramétrica.

Diferentemente das excitações forçadas as quais aparecem matematicamente como uma não homogeneidade nas equações de movimento, as excitações paramétricas aparecem como uma variação temporal em algum coeficiente dessas equações. Tal como as excitações externas podem provocar grandes respostas da estrutura sob certas circunstâncias especiais, as excitações paramétricas também podem provocar altíssimas amplitudes.

É válido lembrar que nas vibrações forçadas, a energia é simplesmente adicionada ao sistema, e de acordo com as condições de ressonância, há a resposta do sistema. Nesses problemas não há variação dos parâmetros, eles são constantes durante todo o processo de oscilação.

Na figura (2.1) são mostrados alguns sistemas que apresentam vibrações paramétricas.

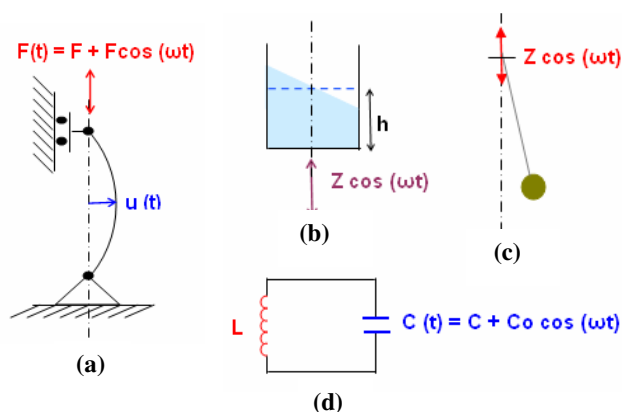


Figura 2.1: Sistemas sujeitos à vibração paramétrica.

onde:

- (a) Barra excitada axialmente.
- (b) Líquido em recipiente com movimento periódico na direção vertical.
- (c) Pêndulo com ponto de suspensão em movimento periódico na direção vertical.
- (d) Circuito com capacitância do capacitor variável no tempo.

## 2.1 A Equação de Mathieu-Hill

Em termos matemáticos, vibrações paramétricas, com um grau de liberdade, são descritas por equações diferenciais homogêneas, nas quais há variação dos coeficientes com o tempo.

$$m(t)\ddot{x} + c(t)\dot{x} + k(t)x = 0 \quad (2.1)$$

onde:

- $m(t)$  - massa do sistema em função do tempo
- $c(t)$  - amortecimento do sistema em função do tempo
- $k(t)$  - rigidez do sistema em função do tempo

Dividindo-se a equação (2.1) por  $m(t)$ :

$$\ddot{x} + k_1(t)\dot{x} + k_2(t)x = 0 \quad (2.2)$$

A variação dos parâmetros da equação pode ser imposta externamente ou auto-excitada pelo oscilador. Em ambos os casos as vibrações paramétricas só ocorrem quando o oscilador é retirado da sua posição de equilíbrio, revelando assim uma dependência da oscilação com um deslocamento inicial.

Nas vibrações forçadas, uma pequena excitação pode provocar ressonância apenas em casos onde a frequência de excitação está próxima à frequência natural do sistema ( $\omega_o$ ). Porém, nas vibrações paramétricas, o fenômeno de ressonância pode ocorrer também nos casos em que a excitação tenha frequência diferente de ( $\omega_o$ ).

Fazendo uma substituição de variáveis na equação (2.2), obtém-se a equação diferencial de Hill, mostrada na equação (2.3).

$$\ddot{y} + K(t)y = 0 \quad (2.3)$$

onde:

$$x = ye^{-\frac{1}{2} \int k_1(t) dt} \quad (2.4)$$

e



$$K(t) = k_2(t) - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [k_1(t)] - \frac{1}{4} k_1^2(t) \quad (2.5)$$

Sendo  $k_1(t)$  e  $k_2(t)$  funções periódicas no tempo (período  $T$ ), conseqüentemente  $K(t)$  também será.

$$K(t+T) = K(t) \quad (2.6)$$

Assim a solução da equação (2.3) terá a forma:

$$y(t) = C_1 e^{\nu_1 t} y_1(t) + C_2 e^{\nu_2 t} y_2(t) \quad (2.7)$$

onde:

$y_1$  e  $y_2$  - Funções periódicas no tempo

$C_1$  e  $C_2$  - Constantes

$\nu_1$  e  $\nu_2$  - Expoentes característicos

Os valores assumidos pelos expoentes característicos dependem apenas dos parâmetros da equação (2.3) e não das condições iniciais. Esses valores determinam se o sistema vibrante apresentará um comportamento estável ou instável.

Caso os dois expoentes tenham uma parte real positiva, então a equação (2.7) apresenta um crescimento ilimitado no tempo, revelando assim um comportamento instável. Porém, se a parte real dos dois expoentes for negativa, a equação (2.7) se aproxima assintoticamente ao zero com o crescimento do tempo.

Em casos limites, um ou ambos dos expoentes podem não possuir uma parte real. Nesse caso, a equação (2.7) representa uma solução periódica.

A expressão  $K(t)$  pode ser expressa por:

$$K(t) = K_o + \Delta K \cos(\omega t) \quad (2.8)$$

Uma forma simplificada de representar a equação (2.3) pode ser obtida através de uma mudança de variáveis. Introduzindo uma nova variável adimensional ( $\tau$ ) temos:

$$\tau = \omega t \quad (2.9)$$

Substituindo os termos  $K_o$  e  $\Delta K$  por  $\lambda$  e  $\kappa$  respectivamente, obtemos:

$$\lambda = \frac{K_o}{\omega^2} \quad (2.10)$$

$$\kappa = \frac{\Delta K}{\omega^2} \quad (2.11)$$

Após todas essas substituições, a equação (2.3), pode ser expressa na forma da equação fundamental de Mathieu-Hill.

$$y'' + (\lambda + \kappa \cos \tau)y = 0 \quad (2.12)$$

É importante ressaltar que na equação (2.12) o termo  $y''$  indica derivada com respeito a variável adimensional  $\tau$ .

## 2.2 Exemplo: Pêndulo com Ponto de Suspensão Oscilante

Um exemplo de um sistema simples sujeito a vibrações paramétricas é o pêndulo com ponto de suspensão oscilando periodicamente na vertical, como ilustrado na figura (2.2).

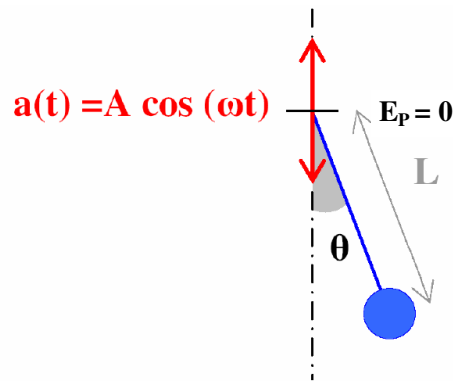


Figura 2.2: Pêndulo de massa  $m$  com ponto de suspensão oscilante.

O comprimento  $L$  do fio de suspensão do pêndulo é constante e o ponto de sustentação oscila segundo a equação:

$$a(t) = A \cos(\omega t) \quad (2.13)$$

A dinâmica de movimento é:

$$L\ddot{\theta} + (g - \ddot{a}) \sin \theta = 0 \quad (2.14)$$

$$L\ddot{\theta} + (g + A\omega^2 \cos(\omega t)) \sin \theta = 0 \quad (2.15)$$

Fazendo uma aproximação válida para pequenos ângulos ( $\theta \approx \sin \theta$ ) e as substituições:

$$\tau = \omega t \quad (2.16)$$

$$\lambda = \frac{g}{L\omega^2} \quad (2.17)$$

$$\kappa = \frac{A}{L} \quad (2.18)$$

A equação (2.15) adquire a forma da equação de Mathieu.

$$\theta'' + (\lambda + \kappa \cos \tau)\theta = 0 \quad (2.19)$$

É importante ressaltar que na equação (2.19) o termo  $\theta''$  indica derivada com respeito a variável adimensional  $\tau$ .

## 2.3 Análise de Estabilidade das Vibrações Paramétricas

A estabilidade de um oscilador paramétrico, como já foi dito na seção anterior, é determinada pelo sinal dos expoentes característicos  $v_1$  e  $v_2$  na equação (2.7). Os valores assumidos por esses expoentes dependem de  $\lambda$  e  $\kappa$  e não das condições iniciais. O oscilador é dito instável se uma perturbação infinitesimal inicia uma crescente vibração. Os valores de  $\lambda$  e  $\kappa$  para os quais as soluções da (2.7) são estáveis e instáveis podem ser representadas em um plano  $\lambda\kappa$ , como é mostrado na figura (2.3).

Na figura, as regiões de hachura representam valores para soluções instáveis, enquanto as não hachuradas soluções estáveis. O gráfico é simétrico em relação ao eixo  $\lambda$ .

### *Primeira Análise:*

Em uma primeira análise do gráfico pode ser feita nos casos em que  $\kappa = 0$ . Dessa forma a equação (2.12) se transforma em uma simples equação de oscilação.

$$y'' + \lambda y = 0 \quad (2.20)$$

Propondo uma solução para a equação (2.20) na forma  $e^{b\tau}$ , e substituindo-a em (2.20) temos que:

$$(b^2 e^{b\tau}) + \lambda e^{b\tau} = 0 \quad (2.21)$$

$$\underbrace{(b^2 + \lambda)}_{\text{Polinômio Característico}} e^{b\tau} = 0 \quad (2.22)$$

Polinômio Característico

Como  $e^{b\tau}$  é sempre maior que zero, temos que  $(b^2 + \lambda)$  forma o polinômio característico, e suas raízes são:  $b = \pm i\sqrt{\lambda}$ . Substituindo os valores encontrados para  $b$  em  $e^{b\tau}$  e fazendo uma

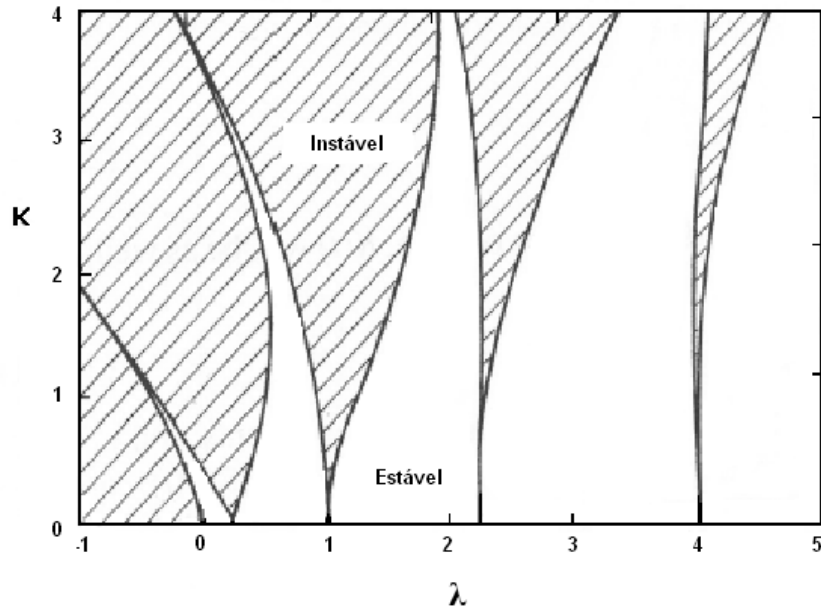


Figura 2.3: Regiões estáveis e instáveis de um oscilador governado pela equação de Mathieu.

composição das duas soluções, obtemos:

$$y(\tau) = Ae^{i\sqrt{\lambda}\tau} + Be^{-i\sqrt{\lambda}\tau} = 0 \quad (2.23)$$

As soluções da equação (2.20) para  $\lambda > 0$  são periódicas, representadas por senos e cossenos e com frequência natural de oscilação igual a  $\sqrt{\lambda}$ . Essas oscilações são consideradas estáveis e representadas no plano  $\lambda\kappa$  da figura (2.3) pela parte positiva do eixo  $\lambda$ .

As soluções da equação (2.20) para  $\lambda < 0$  não são periódicas, são funções exponenciais com expoentes reais. Nesse caso, as soluções de  $y(\tau)$  são instáveis e representadas no plano  $\lambda\kappa$  da figura (2.4) pela parte negativa do eixo  $\lambda$ .

### ***Segunda Análise:***

Uma segunda análise pode ser feita traçando uma reta paralela ao eixo  $\lambda$ , para  $\kappa$  diferente de zero.

Podemos observar no gráfico  $\lambda\kappa$  que mesmo para regiões onde  $\lambda > 0$ , a reta traçada atravessa regiões de instabilidade. Isso indica que dependendo do valor assumido por  $\lambda$ , a solução  $y(\tau)$  pode assumir um comportamento instável, mostrando que a flutuação do termo  $\lambda$  pode resultar na redução de estabilidade do sistema.

O gráfico  $\lambda\kappa$  apresenta as regiões de estabilidade e instabilidade de forma intercalada. A largura das faixas de instabilidade decresce com o aumento do valor de  $n$ . Isso ocorre principalmente devido ao amortecimento, que apesar de não estar sendo considerado, está sempre presente em qualquer oscilador. O amortecimento contribui para a redução das zonas de instabilidade.

As fronteiras entre as zonas estáveis e instáveis podem em geral ser expressas por equações muito simples, funções do tipo  $\lambda = \lambda(\kappa)$ . A obtenção das expressões para estas curvas é feita através do método das perturbações.

### *Método das Perturbações*

Na equação de Mathieu-Hill, assumindo um valor pequeno para  $\lambda$ , a solução de (2.12) pode ser aproximada por:

$$y(\tau) = y_0(\tau) + \kappa y_1(\tau) + \kappa^2 y_2(\tau) + \dots \quad (2.24)$$

$$\lambda = \lambda_0 + \kappa \lambda_1 + \kappa^2 \lambda_2 + \dots \quad (2.25)$$

onde  $\lambda_0, \lambda_1, \dots$  são constantes. Substituindo equações (2.24) e (2.25) em (2.12):

$$\begin{aligned} (y_0'' + \lambda_0 y_0) &+ \kappa (y_1'' + \lambda_1 y_0 + y_0 \cos \tau + \lambda_0 y_1) \\ &+ \kappa^2 (y_2'' + \lambda_2 y_0 + \lambda_1 y_1 + y_1 \cos \tau \\ &+ \lambda_0 y_2) + \dots = 0 \end{aligned} \quad (2.26)$$

Fazendo com que cada um das parcelas de (2.26) assumam valor zero, temos:

$$\kappa^0 : y_0'' + \lambda_0 y_0 = 0 \quad (2.27)$$

$$\kappa^1 : y_1'' + \lambda_1 y_0 + y_0 \cos \tau + \lambda_0 y_1 = 0 \quad (2.28)$$

$$\kappa^2 : y_2'' + \lambda_2 y_0 + \lambda_1 y_1 + y_1 \cos \tau + \lambda_0 y_2 = 0 \quad (2.29)$$

⋮

A solução da equação (2.12) pode ser expressa por:

R

$$y_0(\tau) = \begin{cases} \cos \sqrt{\lambda_0} \tau \\ \sin \sqrt{\lambda_0} \tau \end{cases} \equiv \begin{cases} \cos \frac{n}{2} \tau \\ \sin \frac{n}{2} \tau \end{cases}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.30)$$

onde:

$$\lambda_0 = \frac{n^2}{4}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.31)$$

Considerando valores específicos para  $n$ :

**Para  $n=0$ :**

Substituindo  $n = 0$  em (2.31) e (2.30) obtemos  $\lambda_0 = 0$  e  $y_0 = 1$ . Pela equação (2.28) temos:

$$y_1'' + \lambda_1 + \cos \tau = 0 \quad \therefore \quad y_1'' = -\lambda_1 - \cos \tau \quad (2.32)$$

Para que  $y_1$  seja uma função periódica,  $\lambda_1$  deve ser zero. Integrando duas vezes a equação (2.32), a equação resultante é uma função periódica e pode ser expressa por:

$$y_1(\tau) = \cos \tau + \alpha \quad (2.33)$$

onde  $\alpha$  é a constante de integração. Sabendo que  $\lambda_0 = \lambda_1 = 0$ ,  $y_0 = 1$  e  $y_1 = \cos \tau + \alpha$ , a equação (2.29) pode ser reescrita como:

$$y_2'' + \lambda_2 + (\cos \tau + \alpha) \cos \tau = 0$$

ou

$$y_2'' = -\frac{1}{2} - \lambda_2 - \alpha \cos \tau - \frac{1}{2} \cos 2\tau \quad (2.34)$$

Para que  $y_2$  seja uma função periódica assim como  $y_1$ ,  $(-1/2 - \lambda_2)$  deve ser zero. Dessa forma, para  $n = 0$  a equação (2.25) pode ser reescrita como:

$$\boxed{\lambda_{n=0} = -\frac{1}{2} \kappa^2 + \dots} \quad (2.35)$$

**Para  $n=1$ :**

Nesse caso, a equação (2.31) resulta em  $\lambda_0 = \frac{1}{4}$  e  $y_0 = \cos(\frac{\tau}{2})$  ou  $\sin(\frac{\tau}{2})$ . Considerando a primeira opção, a equação (2.28) é expressa por:

$$y_1'' + \frac{1}{4}y_1 = \left(-\lambda_1 - \frac{1}{2}\right) \cos \frac{\tau}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{3\tau}{2} \quad (2.36)$$

A solução homogênea de (2.36) é:

$$y_1(\tau) = A_1 \cos \frac{\tau}{2} + A_2 \sin \frac{\tau}{2} \quad (2.37)$$

onde  $A_1$  e  $A_2$  são constantes de integração. Como o termo  $\cos \frac{\tau}{2}$  aparece em (2.37), a solução particular terá  $\tau \cos \frac{\tau}{2}$ , sendo dessa forma não periódica. Para evitar isso, e garantir que  $y_1$  seja periódica,  $(-\lambda_1 - \frac{1}{2})$  deve ser zero, fazendo com que  $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$  e (2.36) seja:

$$y_1''(\tau) + \frac{1}{4}y_1 = -\frac{1}{2} \cos \frac{3\tau}{2} \quad (2.38)$$

Substituindo a solução particular  $y_1(\tau) = A_2 \cos \frac{3\tau}{2}$  em (2.38), obtem-se  $A_2 = \frac{1}{4}$ . Dessa forma, a equação (2.29) pode ser expressa por:

$$\begin{aligned} y_2''(\tau) + \frac{1}{4}y_2 &= -\lambda_2 \cos \frac{\tau}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{4} \cos \frac{3\tau}{2} \right) - \left( \frac{1}{4} \cos \frac{3\tau}{2} \right) \cos \tau \\ &= \left( -\lambda_2 - \frac{1}{8} \right) \cos \frac{\tau}{2} + \frac{1}{8} \cos \frac{3\tau}{2} - \frac{1}{8} \cos \frac{5\tau}{2} \end{aligned} \quad (2.39)$$

Como a solução homogênea de (2.39) contém o termo  $\cos \tau/2$ , seu coeficiente deve ser zero. Dessa forma,  $a_2 = -\frac{1}{8}$  e a equação (2.36) é expressa por:

$$\lambda_{n=1} = \frac{1}{4} - \frac{\kappa}{2} - \frac{\kappa^2}{8} + \dots \quad (2.40)$$

Se ao invés de  $y_0 = \cos \left( \frac{\tau}{2} \right)$  optássemos por  $y_0 = \cos \left( \frac{\tau}{2} \right)$ , obteríamos a relação:

$$\lambda_{n=1} = \frac{1}{4} + \frac{\kappa}{2} - \frac{\kappa^2}{8} + \dots \quad (2.41)$$

**Para  $n=2$ :**

Através do mesmo procedimento feito para  $n = 0$  e  $n = 1$ , obtemos quando assumimos  $y_0 = \cos \tau$  e  $y_0 = \sin \tau$  as respectivas equações:

$$\lambda_{n=2} = 1 + \frac{5}{12}\kappa^2 + \dots \quad (2.42)$$

$$\lambda_{n=2} = 1 - \frac{1}{12}\kappa^2 + \dots \quad (2.43)$$

As equações (2.35), (2.40), (2.41), (2.42) e (2.43) são expressões para as fronteiras entre as zonas estáveis e instáveis do plano  $\lambda\kappa$ , como mostra a figura (2.4).

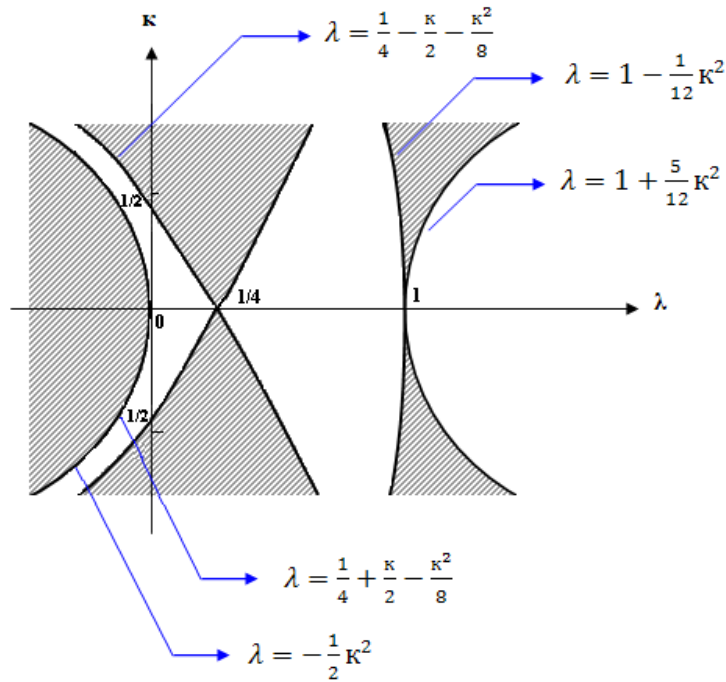


Figura 2.4: Diagrama de equilíbrio para regiões próximas a origem do plano  $\lambda\kappa$ .

## 2.4 Resultados: Resposta Dinâmica e Diagrama de Fase

O uso do diagrama de estabilidade, mostrado nas figuras (2.3) e (2.4), será ilustrado pelo caso do pêndulo com ponto de suspensão em movimento periódico na direção vertical.

Alguns gráficos feitos em *Matlab* de respostas dinâmicas e diagramas de fase para um sistema governado pela equação de Mathieu exemplificarão os casos de estabilidade e instabilidade.

### Casos em que $\lambda > 0$

As figuras (2.5) e (2.6) mostram os gráficos de resposta dinâmica e diagrama de fase para um sistema governado pela equação de Mathieu. Os valores de constantes usados para elaboração dos gráficos foram  $\lambda = 0, 1$  e  $\kappa = 0, 1$ . Observando esses gráficos, verificamos que o sistema apresenta um comportamento periódico, estando de acordo com gráfico (2.4) para as coordenadas em questão.

Mantendo o valor de  $\lambda$  constante e aumentando o valor de  $\kappa$ , segundo o gráfico (2.4), o sistema passa a ter um comportamento instável. Essa mudança pode ser observada através das figuras (2.7) e (2.8) que mostram os gráficos de resposta dinâmica e diagrama de fase para um sistema com  $\lambda = 0, 1$  e  $\kappa = 0, 9$ . Esses gráficos revelam que a resposta do sistema aumenta com o crescimento de  $\tau$  e que o diagrama de fase assume a forma de um foco instável.



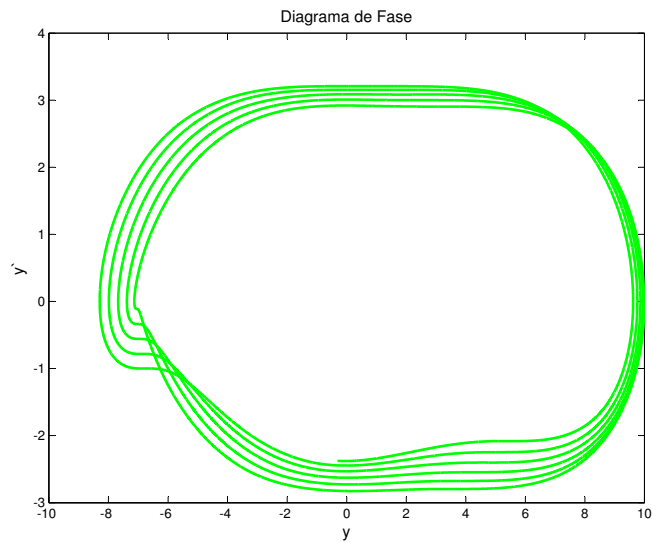


Figura 2.5: Diagrama de fase para sistema com  $\lambda = 0, 1$  e  $\kappa = 0, 1$ .

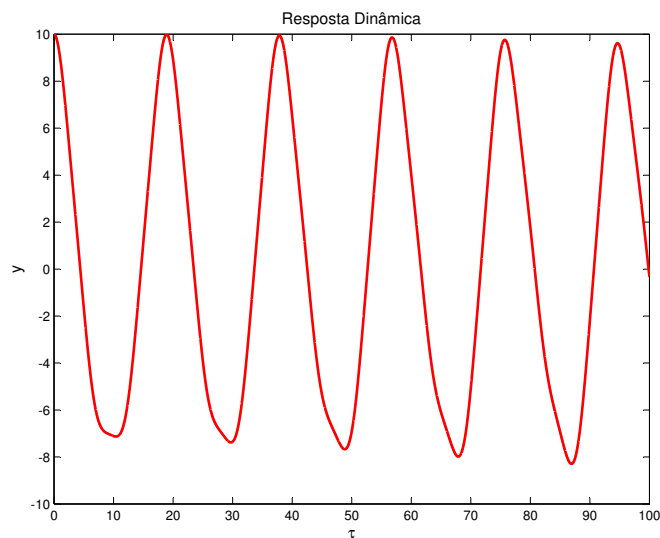


Figura 2.6: Resposta dinâmica para sistema com  $\lambda = 0, 1$  e  $\kappa = 0, 1$ .

### Casos em que $\lambda < 0$

As figuras (2.9) e (2.10) mostram os gráficos de resposta dinâmica e diagrama de fase para um sistema governado pela equação de Mathieu. Os valores de constantes usados para elaboração dos gráficos foram  $\lambda = -0, 1$  e  $\kappa = 0, 5$ . Observando esses gráficos, verificamos que o sistema apresenta um comportamento periódico estável, estando de acordo com gráfico (2.4) para as coordenadas em questão.

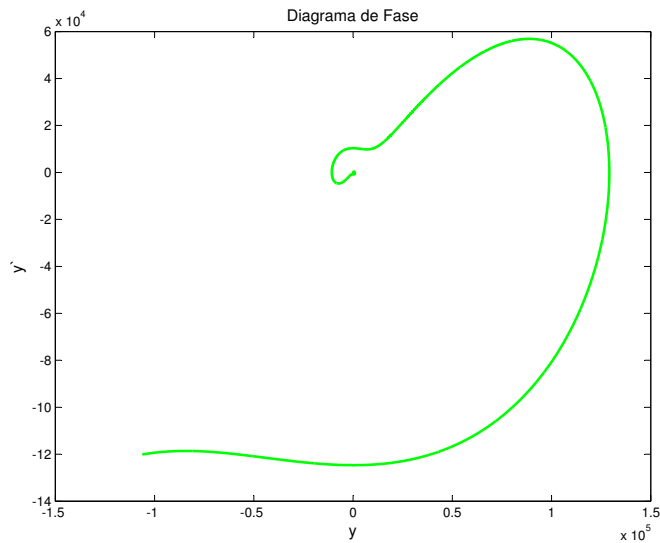


Figura 2.7: Diagrama de fase para sistema com  $\lambda = 0, 1$  e  $\kappa = 0,9$ .

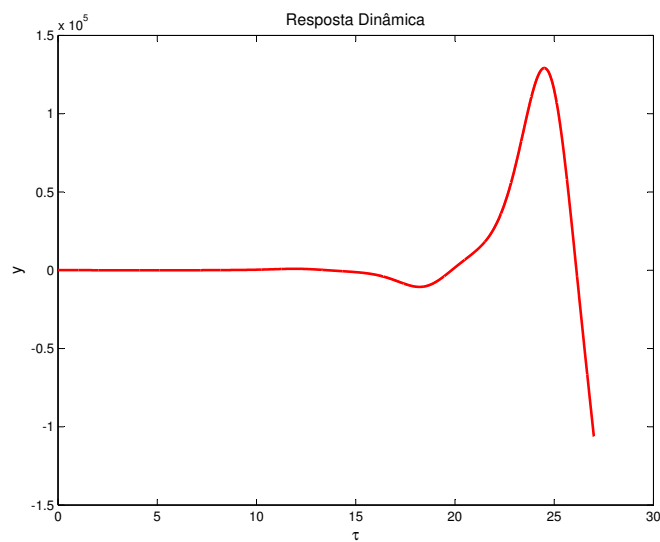


Figura 2.8: Resposta dinâmica para sistema com  $\lambda = 0, 1$  e  $\kappa = 0,9$ .

Isso mostra que o sistema fosse o pêndulo com ponto de suspensão oscilando periodicamente na vertical (mostrado anteriormente) com centro de gravidade localizado acima do ponto de suspensão (ou seja,  $\lambda < 0$ ), apesar do sistema possuir um equilíbrio instável, poderia oscilar em torno desse ponto de equilíbrio instável dependendo dos valores assumidos por  $\lambda$  e  $\kappa$ .

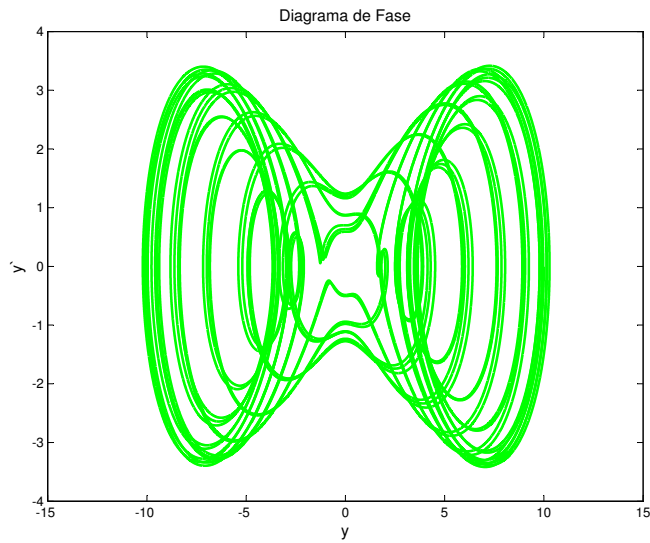


Figura 2.9: Diagrama de fase para sistema com  $\lambda = -0,1$  e  $\kappa = 0,5$ .

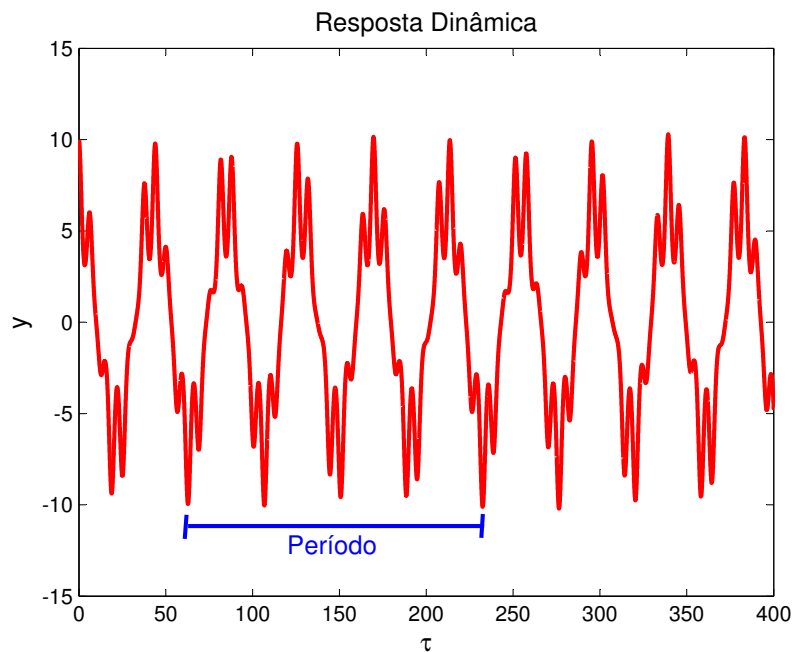


Figura 2.10: Resposta dinâmica para sistema com  $\lambda = -0,1$  e  $\kappa = 0,5$ .

Mantendo o valor de  $\lambda$  constante e aumentando o valor de  $\kappa$ , segundo o gráfico (2.4), o sistema passa a ter um comportamento instável. Essa mudança pode ser observada através das figuras (2.11) e (2.12) que mostram os gráficos de resposta dinâmica e diagrama de fase para um sistema com  $\lambda = -0,1$  e  $\kappa = 1,0$ . Esses gráficos revelam que a resposta do sistema aumenta com o crescimento de  $\tau$  e que o diagrama de fase assume a forma de um foco instável.

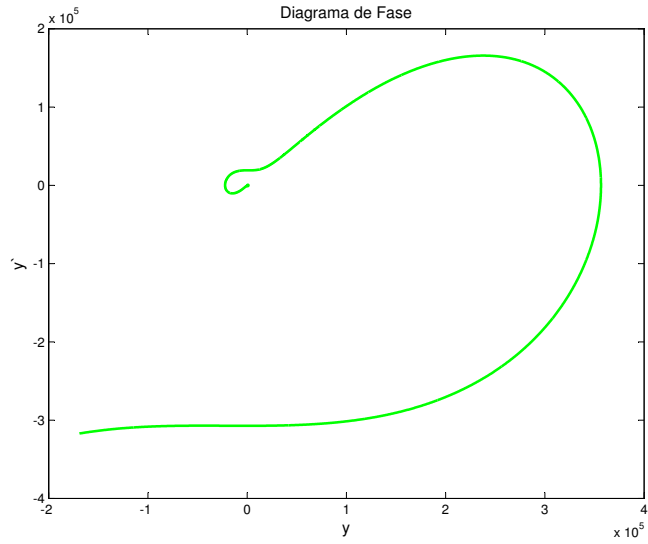


Figura 2.11: Diagrama de fase para sistema com  $\lambda = -0,1$  e  $\kappa = 1,0$ .

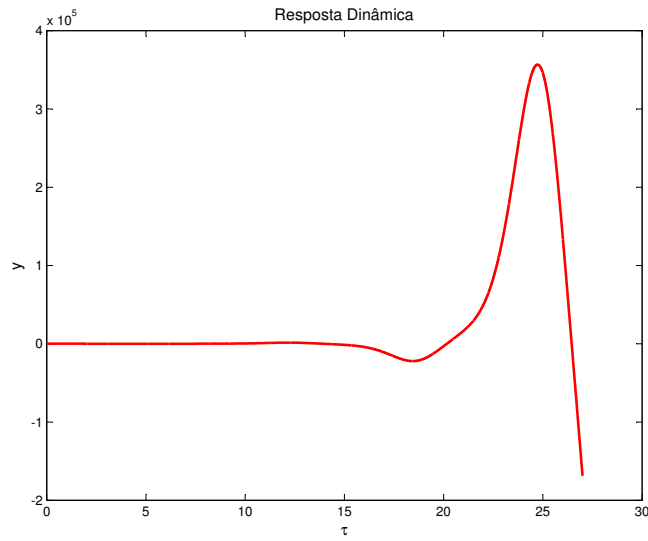


Figura 2.12: Resposta dinâmica para sistema com  $\lambda = -0,1$  e  $\kappa = 1,0$ .

# Capítulo 3

## Vibrações Não Lineares com Amortecimento Linear

### 3.1 A Equação de Duffing

Muitos problemas de dinâmica não linear podem ser modelados pela equação de Duffing, mostrada na equação (3.1):

$$\ddot{x} + c\dot{x} + \omega_n^2 x \pm \alpha x^3 = F \cos(\omega t) \quad (3.1)$$

onde:

$\omega_n$  = frequência natural de oscilação [1/s]

$c$  = amortecimento [1/s]

$\alpha$  = termo de não linearidade [1/m<sup>2</sup>s<sup>2</sup>]

$F$  = forçamento [m/s<sup>2</sup>]

#### Equação Não Amortecida

Para os casos sem amortecimento, ou seja,  $c = 0$ , a equação (3.1) reduz-se a (3.2):

$$\ddot{x} + (\omega_n)^2 x \pm \alpha x^3 = F \cos(\omega t) \text{ ou } \ddot{x} = -(\omega_n)^2 x \mp \alpha x^3 + F \cos(\omega t) \quad (3.2)$$

Como uma primeira aproximação, assume-se a solução da equação (3.2) como:

$$x_1 = A \cos(\omega t) \quad (3.3)$$

Utilizando o método iterativo de solução de equações diferenciais, substitui-se (3.3) em (3.2) e obtêm-se:

$$\ddot{x}_2 = -A\omega_n^2 \cos(\omega t) \mp A^3 \alpha \cos^3(\omega t) + F \cos(\omega t) \quad (3.4)$$

Sabendo que:

$$\begin{aligned} \cos(\omega t)^3 &= \cos^2(\omega t) \cos(\omega t) = [1 - \sin^2(\omega t)] \cos(\omega t) \\ &= \cos(\omega t) - [\cos^2(\omega t) - \cos(2\omega t)] \cos(\omega t) \\ &= \cos(\omega t) - \cos^3(\omega t) + \cos(\omega t) \cos(2\omega t) \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} 2 \cos(\omega t)^3 &= \cos(\omega t) + \cos(\omega t) \cos(2\omega t) \\ &= \cos(\omega t) + [\cos(3\omega t) + \sin(2\omega t) \cos(\omega t)] \\ &= \cos(\omega t) + \cos(3\omega t) + 2[1 - \cos^2(\omega t)] \cos(\omega t) \\ &= \cos(\omega t) + \cos(3\omega t) + 2 \cos(\omega t) - 2 \cos^3(\omega t) \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\boxed{\cos^3(\omega t) = \frac{3}{4} \cos(\omega t) + \frac{1}{4} \cos(3\omega t)} \quad (3.7)$$

a equação(3.4) pode ser expressa por:

$$\ddot{x}_2(t) = -(A\omega_n^2 \pm \frac{3}{4}A^3\alpha - F) \cos(\omega t) \mp \frac{1}{4}A^3\alpha \cos(3\omega t) \quad (3.8)$$

Integrando duas vezes essa equação, obtemos uma segunda aproximação para a solução da equação (3.2).

$$x_2(t) = \frac{1}{\omega^2} [A\omega_n^2 \pm \frac{3}{4}A^3\alpha - F] \cos(\omega t) \pm \frac{A^3\alpha}{36\omega^2} \cos(3\omega t) \quad (3.9)$$

Igualando os coeficientes de  $\cos(\omega t)$  em  $x_1$  e em  $x_2$ , obtemos:

$$A = \frac{1}{\omega^2} [A\omega_n^2 \pm \frac{3}{4}A^3\alpha - F] \quad \text{ou} \quad \omega^2 = \omega_n^2 \pm \frac{3}{4}A^2\alpha - \frac{F}{A} \quad (3.10)$$

### **Equação Amortecida**

Sistemas amortecidos sujeitos a forçamento harmônico apresentam a dinâmica de movimento:

$$\ddot{x} + c\dot{x} + \omega_n^2 \pm \alpha = F \cos(\omega t + \phi) \quad (3.11)$$

$$= A_1 \cos \omega t - A_2 \sin \omega t \quad (3.12)$$

onde:

$$F = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \quad (3.13)$$

Assumindo que uma primeira aproximação para a equação é:

$$x_1(t) = A \cos \omega t \quad (3.14)$$

Substituindo a expressão de  $x_1$  em (3.11) e utilizando a relação explicitada em (3.7), obtem-se:

$$[(\omega_n^2 - \omega^2)A \pm \frac{3}{4}\alpha A^3] \cos \omega t - c\omega A \sin \omega t \pm \frac{\alpha A^3}{4} \cos 3\omega t = A_1 \cos \omega t - A_2 \sin \omega t \quad (3.15)$$

Dessa forma, obtemos que:

$$(\omega_n^2 - \omega^2)A \pm \frac{3}{4}\alpha A^3 = A_1 \quad (3.16)$$

$$c\omega A = A_2 \quad (3.17)$$

Utilizando a relação mostrada pela equação (3.13):

$$[(\omega_n^2 - \omega^2)A \pm \frac{3}{4}\alpha A^3]^2 + (c\omega A)^2 = A_1^2 + A_2^2 = F^2 \quad (3.18)$$

$$A^6(\frac{9}{16}\alpha^2) + A^4(\pm \frac{3}{2}\omega_n^2\alpha \mp \frac{3}{2}\omega^2\alpha) + A^2(\omega_n^4 - 2\omega_n^2\omega^2 + \omega^4 + c^2\omega^2) - F^2 = 0 \quad (3.19)$$

O polinômio do sexto grau (3.19) revela que para cada frequência de oscilação do sistema ( $\omega$ ), a amplitude de deslocamento pode assumir até 6 valores distintos. Considerando somente os valores positivos para a amplitude, temos três valores possíveis. Os gráficos traçados em Matlab (3.1),(3.2) e (3.3) mostram as respostas de um sistema em função do valor de força aplicada para valores positivos de  $\alpha$ , valores negativos, e valores nulos.

## 3.2 Análise de Estabilidade da Equação de Duffing

Considerando a equação de duffing sem amortecimento e sem forçamento externo, temos:

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x \pm \alpha x^3 = 0 \quad (3.20)$$

A equação da energia potencial é:

$$V = \frac{1}{2}\omega_n^2 x^2 + \frac{1}{4}\alpha x^4 = 0 \quad (3.21)$$

Dessa forma, temos:

$$\frac{dV}{dt} = \omega_n^2 x + \alpha x^3 = 0 \quad (3.22)$$

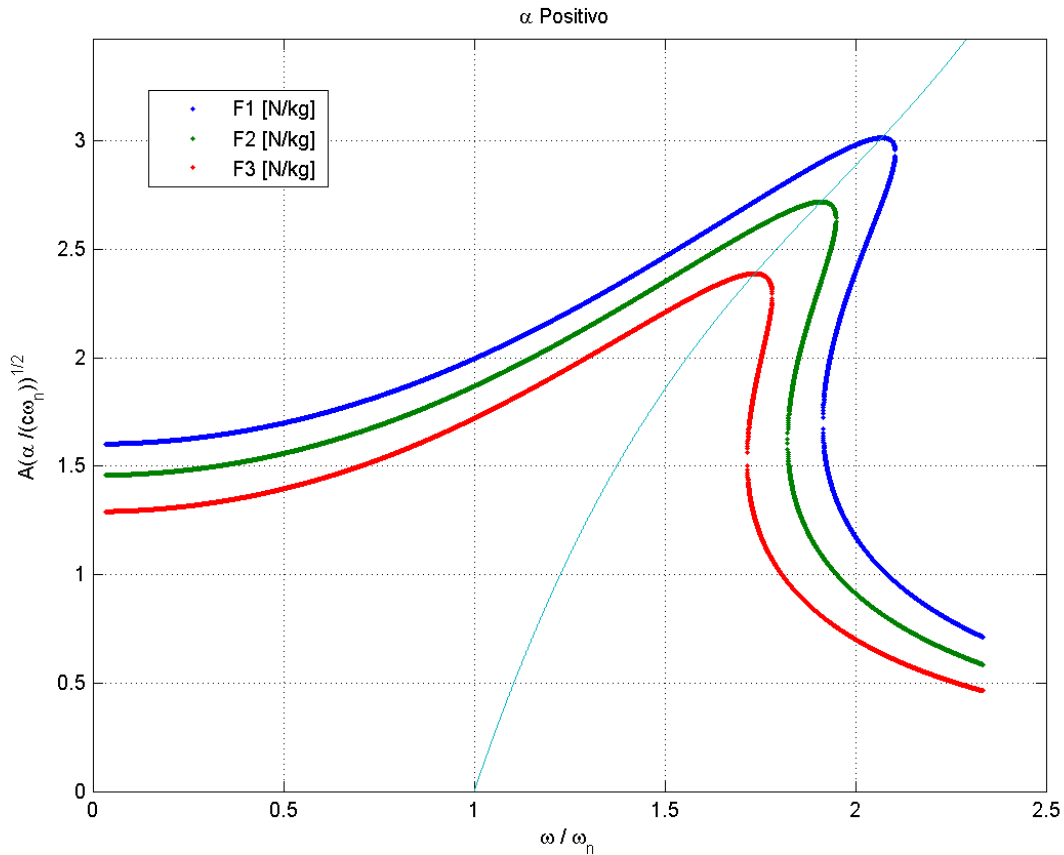


Figura 3.1: Ressonância em Duffing com  $\alpha$  positivo

No equilíbrio, ou seja, pontos de estabilidade, os valores assumidos por  $x$  são:

$$x = 0 \quad e \quad x = \sqrt{\frac{\omega_n^2}{\alpha}} \quad (3.23)$$

Pose-se visualizar os pontos de estabilidade na figura (3.4).

O sistema governado pela equação de duffing apresenta uma resposta dinâmica fortemente dependente das condições iniciais de velocidade e deslocamento. Isso revela características de caos.

Quando o sistema é submetido a um deslocamento infinitesimal do seu ponto de equilíbrio, dependendo do valor da velocidade no instante de início de movimento, oscila em torno desse ponto de equilíbrio ou em torno de outro ponto de equilíbrio.

Esse fenômeno é ilustrado pelo caso do sistema com amortecimento,  $\omega_n^2 = -0.5$  e  $\alpha = 0.5$ . Na figura (3.5) observa-se que para  $\dot{x}(t=0) = \dot{x}_0 = 0.52$  e para  $x(t=0) = x_0 = 1.0$  o sistema oscila em torno do ponto  $x(t \rightarrow \infty) = +1$ .



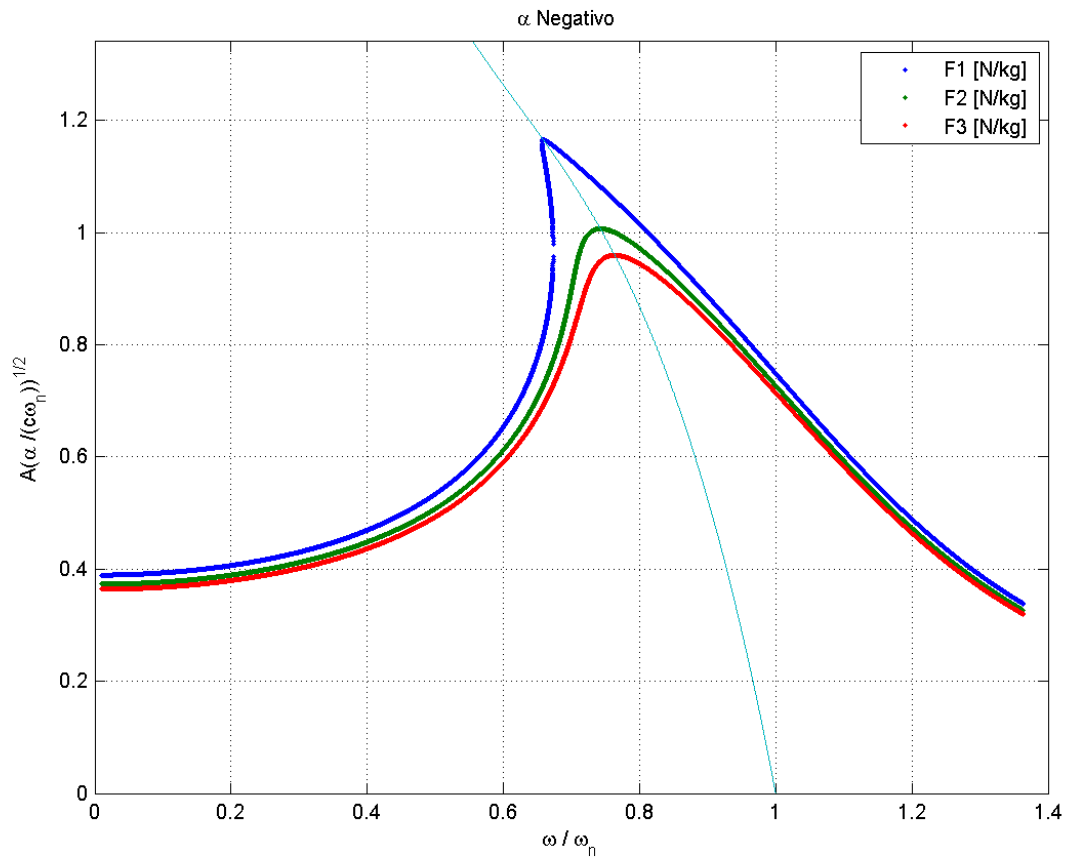


Figura 3.2: Resonância em Duffing com  $\alpha$  negativo

Para o caso no qual  $\dot{x}_0 = 0.54$  e para  $x_0 = 1.0$  temos que o sistema oscila em torno do ponto  $x(t \rightarrow \infty) = -1$ , cruzando somente uma vez o ponto  $x = 0$ .

Para o caso no qual  $\dot{x}_0 = 0.57$  e para  $x_0 = 1.0$  temos que o sistema oscila em torno do ponto  $x(t \rightarrow \infty) = +1$ , cruzando duas vezes o ponto  $x = 0$ .

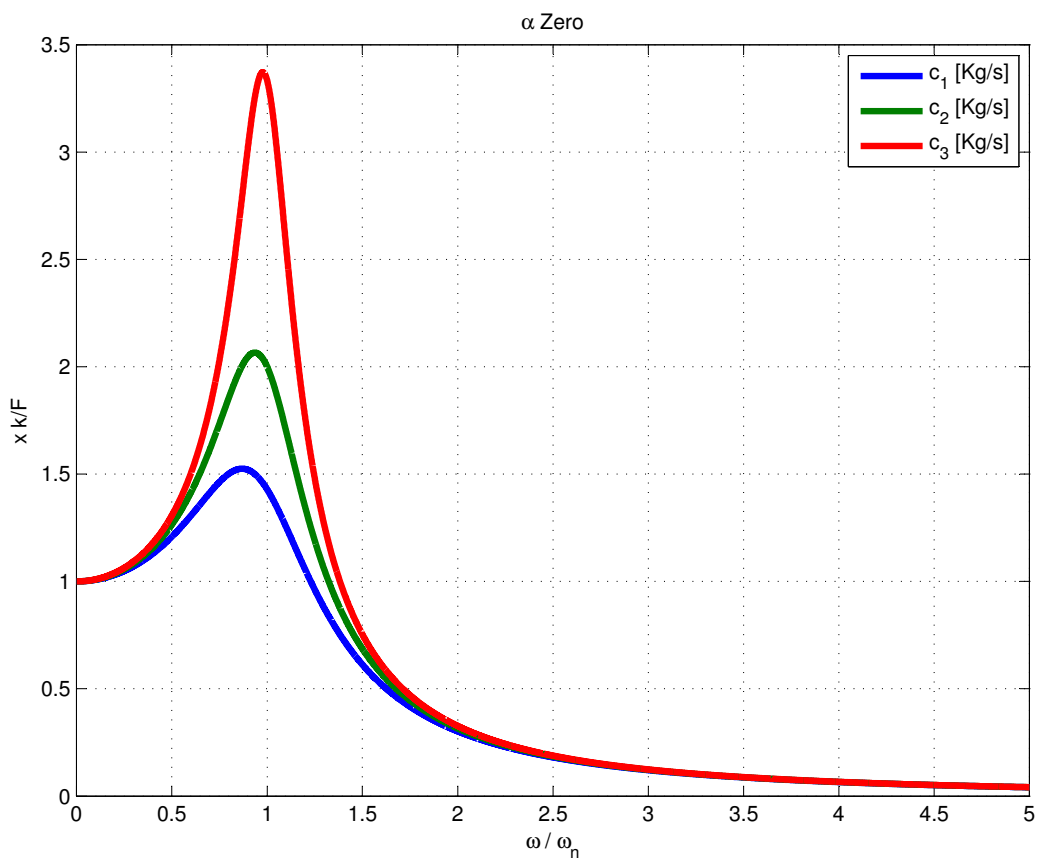


Figura 3.3: Resonância em Duffing com  $\alpha$  zero

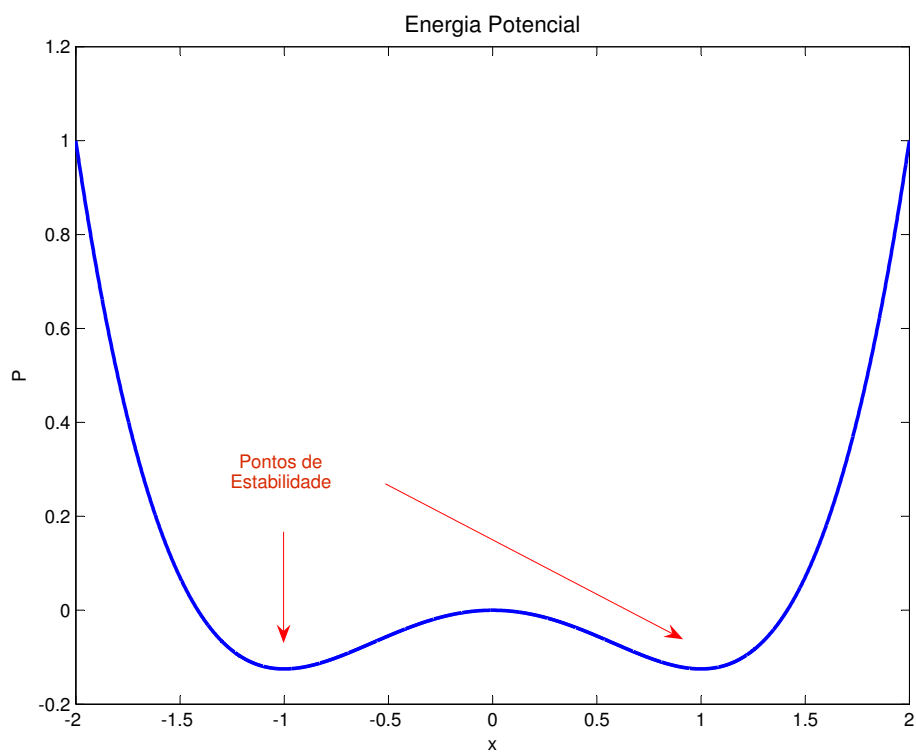


Figura 3.4: Energia Potencial - Pontos de Estabilidade, parâmetros usados:  $\omega_n^2 = 0.5$  e  $\alpha = 0.5$

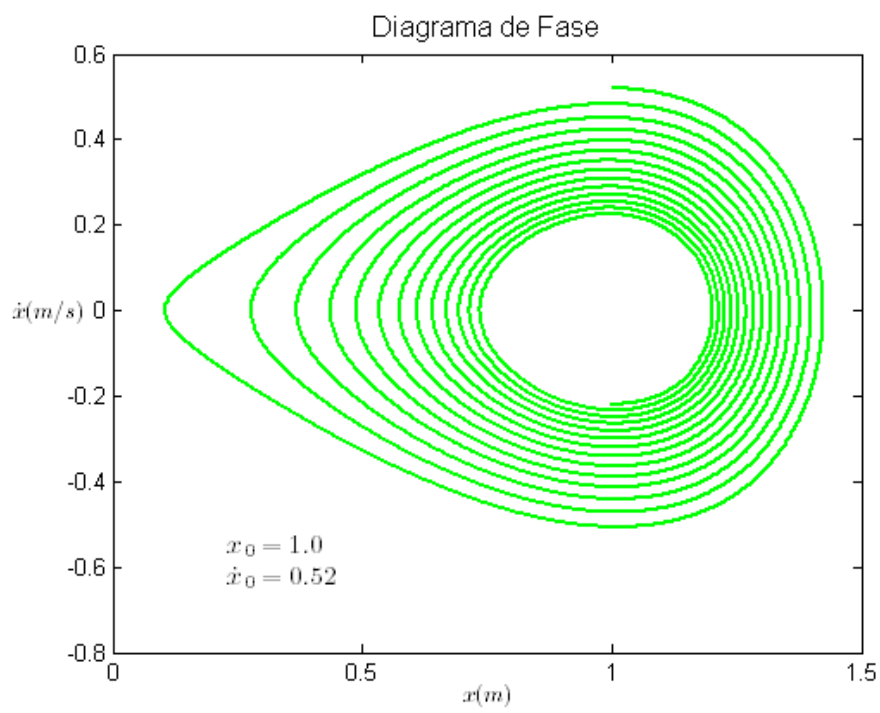


Figura 3.5: Diagrama de fase para sistema com  $x_0 = 1.0$  e  $\dot{x}_0 = 0.52$

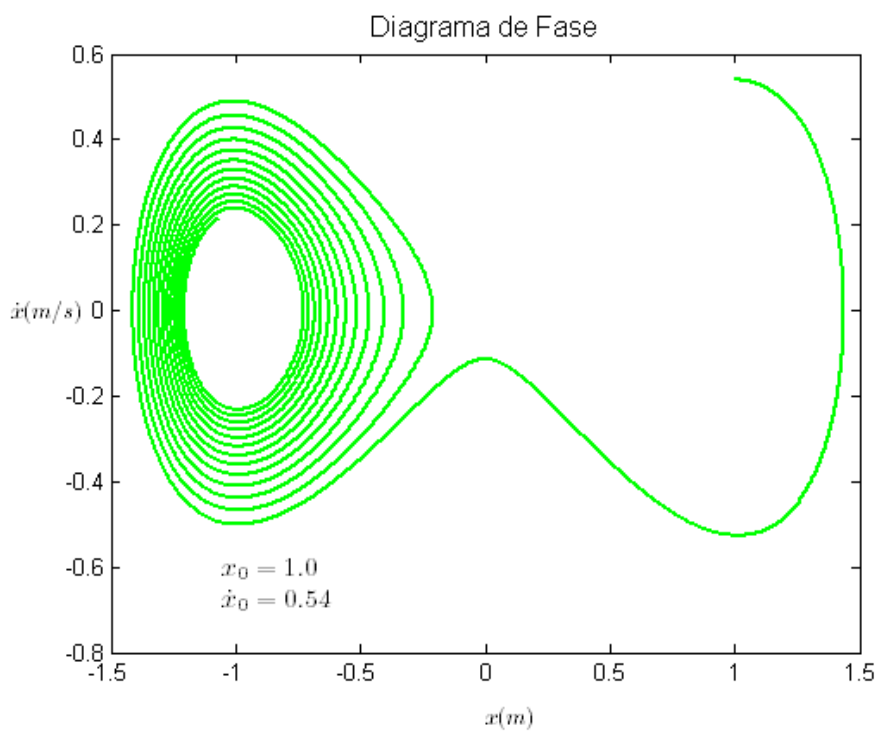


Figura 3.6: Diagrama de fase para sistema com  $x_0 = 1.0$  e  $\dot{x}_0 = 0.54$

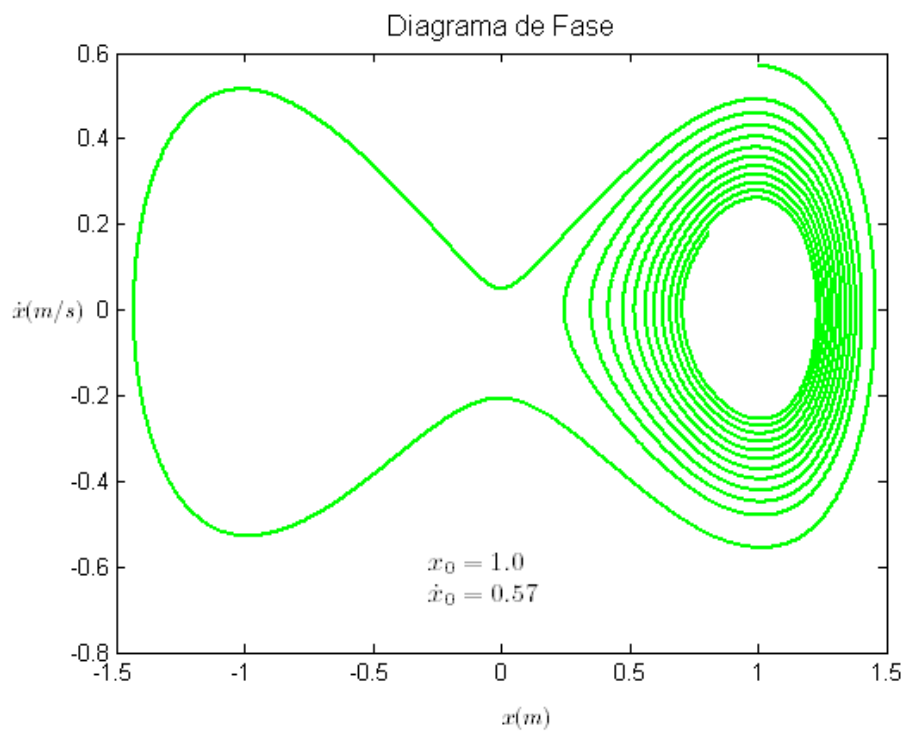


Figura 3.7: Diagrama de fase para sistema com  $x_0 = 1.0$  e  $\dot{x}_0 = 0.57$

## Capítulo 4

# Vibrações com Amortecimento Não Linear

### 4.1 A Equação de Van der Pol

Vários problemas de vibrações com amortecimento não linear são modelados dinamicamente pela equação de Van de Pol. A principal característica dos sistemas que permitem essa modelagem é a existência de um ciclo limite para suas trajetórias de movimento. Independentemente da amplitude inicial de movimento desses sistemas, o diagrama de fase sempre tende para uma única curva que corresponde à solução periódica quando o tempo tende ao infinito.

A equação diferencial não linear de Van der Pol é:

$$\ddot{x} - \alpha(1 - x^2)\dot{x} + x = 0 \quad (4.1)$$

Nessa equação o termo  $\alpha(1 - x^2)$  introduz um amortecimento que assume valores negativos para pequenas amplitudes de movimento, caracterizando o sistema como acreativo, e assume valores positivos para grandes amplitudes de movimento, caracterizando o sistema como dissipativo.

Exemplos de sistemas que se enquadram nesse modelo são sistemas elétricos de realimentação.

### 4.2 Análise de Estabilidade da Equação de Van der Pol

Nas figuras (4.1) e (4.2) pode-se ver o diagrama de fase e resposta dinâmica de um sistema com  $x_0 = 0.001$  e  $\dot{x}_0 = 0$ . Devido ao pequeno valor de  $x_0$  no início do movimento, o termo  $\alpha(1 - x^2)$  assume valor negativo, caracterizando o sistema como acreativo.

Nas figuras (4.3) e (4.3) pode-se ver o diagrama de fase e resposta dinâmica de um sistema com  $x_0 = 5$  e  $\dot{x}_0 = 0$ . Devido ao valor de  $x_0$  no início do movimento, o termo  $\alpha(1 - x^2)$  assume valor positivo, caracterizando o sistema como dissipativo.

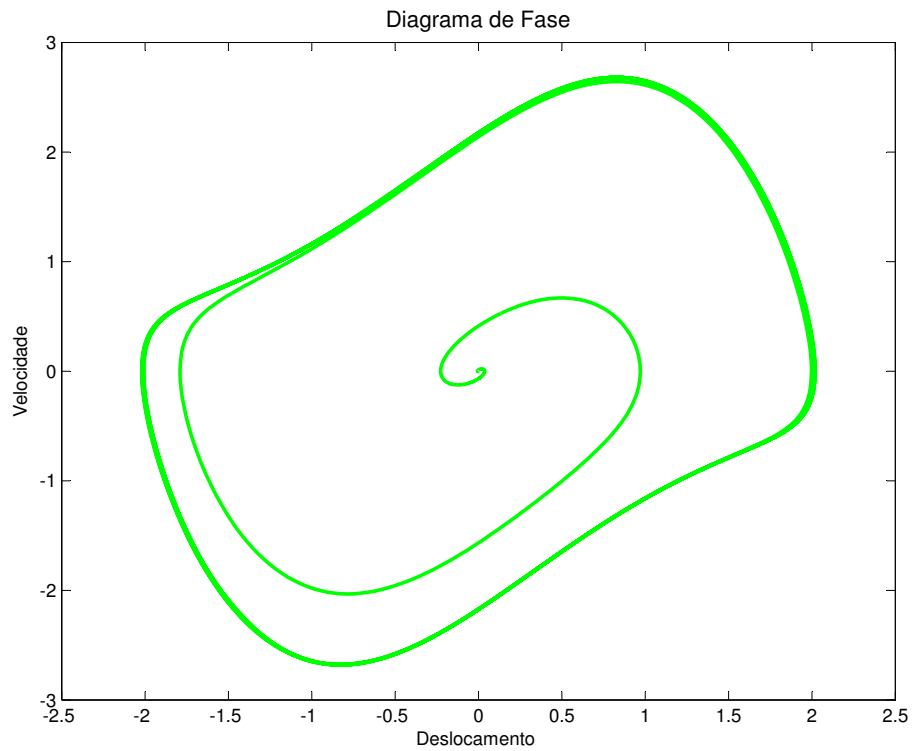


Figura 4.1: Diagrama de fase para sistema com  $x_0 = 0.001$  e  $\dot{x}_0 = 0$

Comparando as figuras (4.1) e (4.3) verificamos que independentemente do valor assumido por  $x_0$  no início do movimento, o sistema atinge um ciclo limite para o seu movimento.



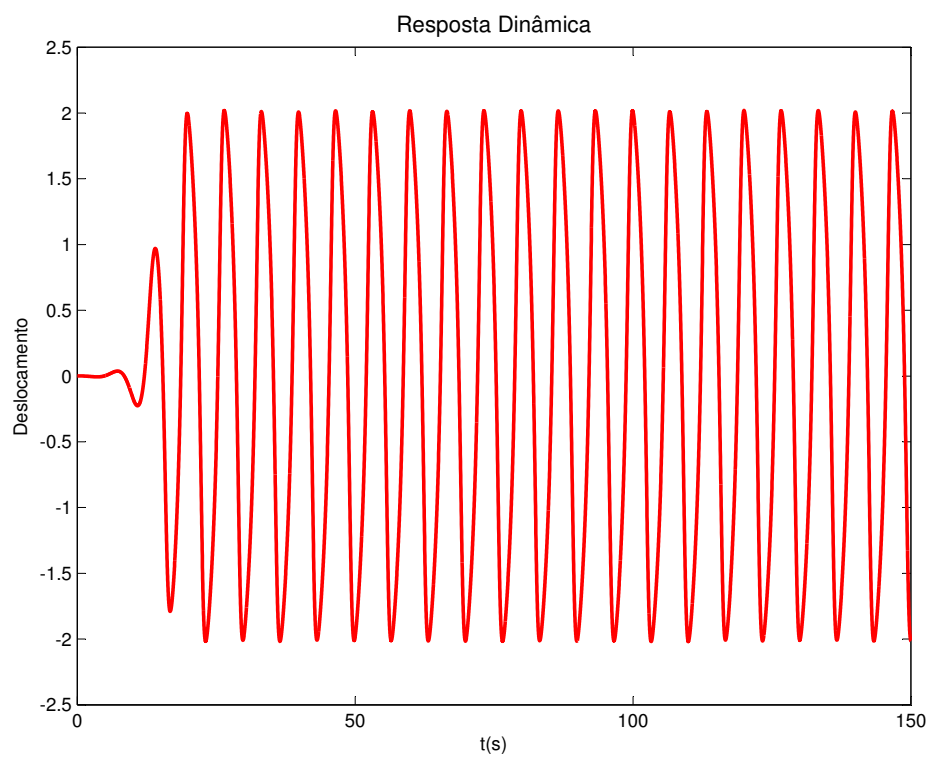


Figura 4.2: Resposta dinâmica para sistema com  $x_0 = 0.001$  e  $\dot{x}_0 = 0$

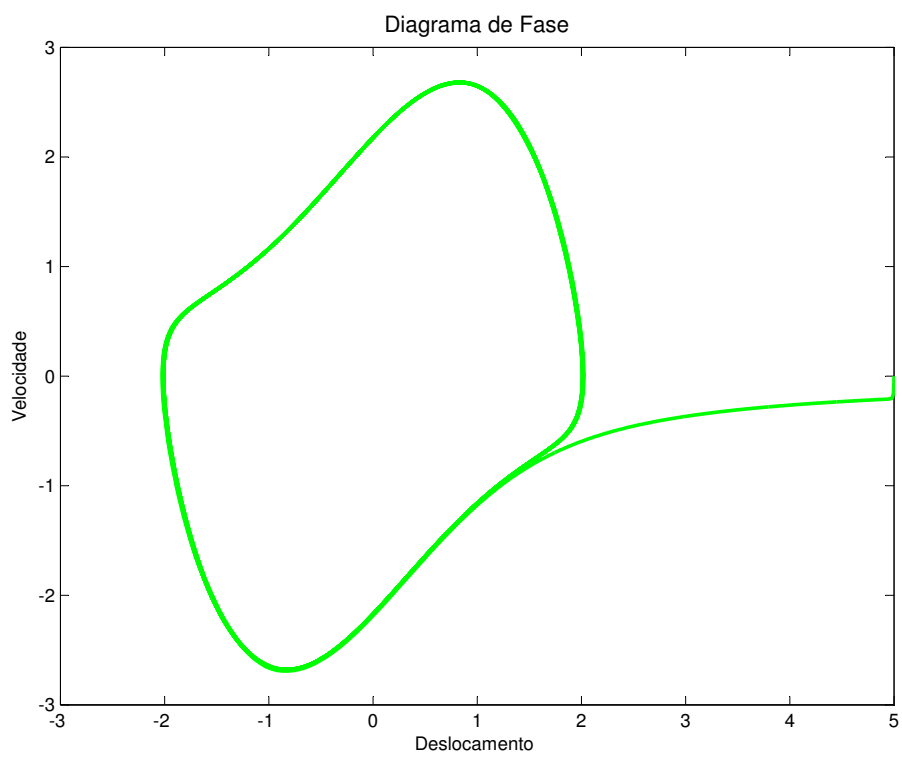


Figura 4.3: Diagrama de fase para sistema com  $x_0 = 5.0$  e  $\dot{x}_0 = 0$

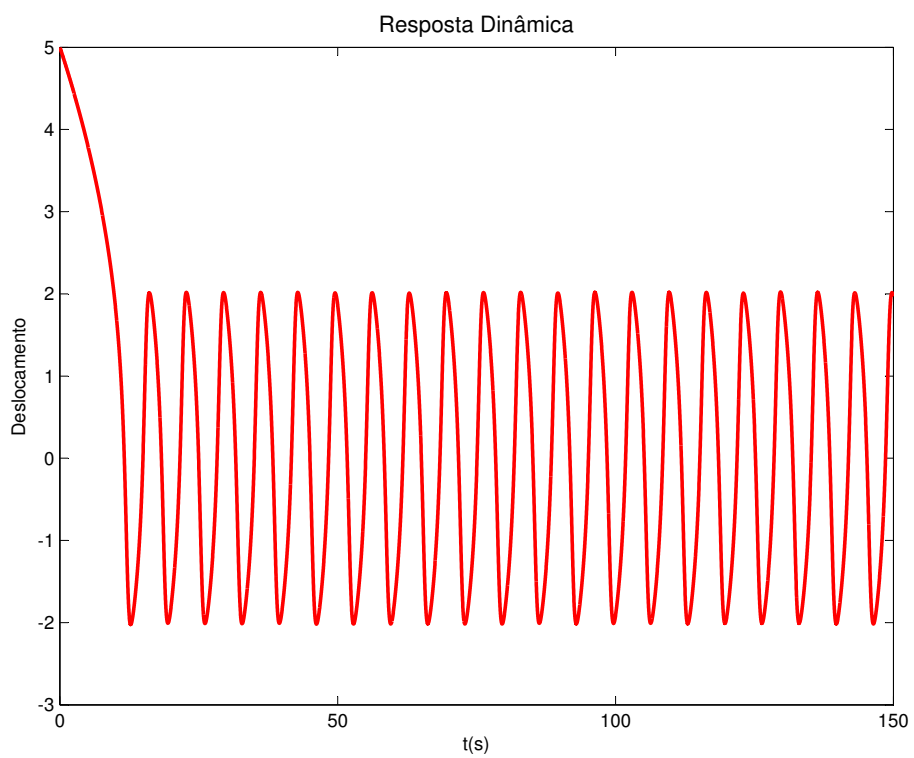


Figura 4.4: Resposta dinâmica para sistema com  $x_0 = 5.0$  e  $\dot{x}_0 = 0$

# Capítulo 5

## Conclusões

Nesse trabalho foram estudados três modelos dinâmicos lineares e não lineares: vibrações paramétricas (equação de Mathieu-Hill), vibrações não lineares com amortecimento linear (Equação de Duffing) e vibrações com amortecimento não linear (Equação de Van der Pol).

Gráficos traçados em *Matlab* mostraram diagramas de fase, respostas dinâmicas e o fenômeno de ressonância para os sistemas tratados, permitindo dessa forma uma análise e maior entendimento das condições de estabilidade e instabilidade dos modelos estudados.

Foram simuladas inúmeras condições operacionais para avaliação de como parâmetros externos ou da própria estrutura afetam seu comportamento. Verificou-se que em vibrações paramétricas a estabilidade está relacionada com os valores assumidos por constantes na equação da dinâmica de movimento, já quando se introduz uma não linearidade, obtendo-se a equação de duffing, por exemplo, as condições de estabilidade são fortemente dependentes das condições iniciais de velocidade e deslocamento.

# Referências Bibliográficas

- [1] CARTMELL, M. **Introduction to Linear, Parametric and Nonlinear Vibrations**. Londres: Chapman and Hall, 1990.
- [2] NAUDASCHER, E., ROCKWELL, D. **Flow-Induced Vibrations: An Engineering Guide**. New York, Mineola: Dover Publications, 1994.
- [3] THOMSON, W.T. **Teoria da Vibração com Aplicações**. Rio de Janeiro, Interciência, 1978. 462p.
- [4] JORDAN, D.W, SMITH, P. **Nonlinear Ordinary Differential Equations**. Oxford, Clarendon: Oxford University Press, 1977. 360p.
- [5] MAGNUS, K. **Vibrations**. Londres: Blackie & Son, 1965.
- [6] RAND, R.H. **Lecture Notes on Nonlinear Vibrations**. Itaca, NY: Cornell University, 2003.
- [7] RULLI, C.C., RINO, J.P. **Oscilações Paramétricas: uma simulação numérica**. São Carlos, 2007. Universidade Federal de São Carlos, Sociedade Brasileira de Física.
- [8] RAO, S.S. **Mechanical Vibrations**. 3.ed. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, 1995. 920p.
- [9] THOMPSON, J.M.T., STEWARD, H., B. **Nonlinear Dynamics and Chaos**. 3.ed. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, 1995. 920p.
- [10] SILVA, D.G. **Vibrações Ressonantes Não-Lineares em Estruturas Tipo Viga Sob Excitação Paramétrica e Combinada**. São Carlos, 2006. 345p. Monografia (Doutorado em Engenharia Mecânica) - Escola de Engenharia, Universidade de São Paulo.