

Elementos Finitos Aplicados às Cascas Axissimétricas

Aluno: Marcos Paulo Faria Lima Barreto
Orientador: Carlos Alberto Almeida

Introdução

Estudou-se o comportamento de cascas axissimétricas sob carregamentos de pressão e diversas formas de condições de contorno, utilizando como solução o método dos elementos finitos. O modelo utiliza funções preditivas para o deslocamento em cada elemento descrevendo os deslocamentos radiais e axiais dos pontos da casca. A partir destes obtêm-se as tensões presentes no elemento. Representações gráficas das tensões são apresentadas a partir de soluções em ambiente Matlab.

O estudo é importante para a compreensão dos métodos numéricos e barateamento dos cálculos envolvendo vasos de pressão, por conseqüência buscando diminuir o preço e o tempo necessário para o projeto destes.

Desenvolveu-se um programa em linguagem C para simular o problema de vasos de pressão de paredes finas e espessas sem a necessidade de fazer tratamentos diferentes a estes e admitir diversas condições de contorno e forçamentos. A análise dos resultados deste é realizada através da comparação com a solução analítica disponível para um caso e com o atendimento das condições de contorno não impostas no modelo.

Formulação Analítica

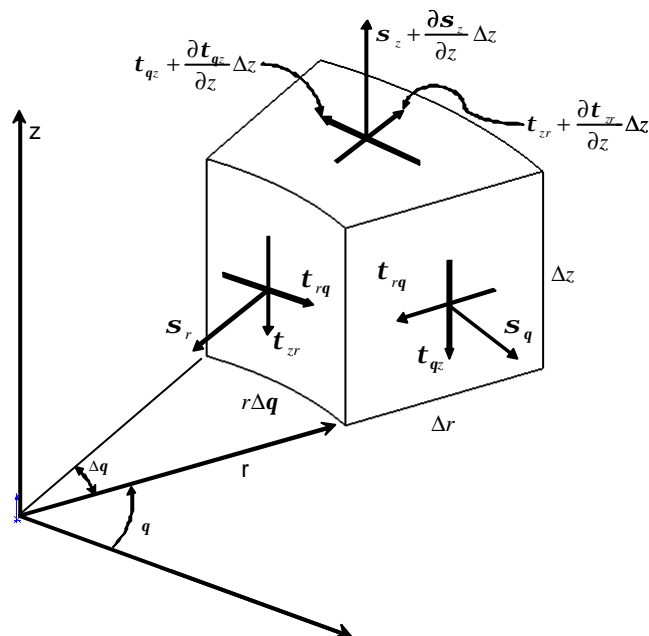


Figura 1 - Tensões no Elemento de Casca Cilíndrica

O princípio do equilíbrio enuncia que se um corpo está em equilíbrio toda parte deste também está. Linearizando as funções de tensões por suas derivadas e sabendo que o sistema é simétrico axialmente. Usando o equilíbrio de forças na direção radial chega-se a seguinte equação:

$$\begin{aligned}
 & -s_r(r\Delta q)\Delta z + \left(s_r + \frac{\partial s_r}{\partial r} \Delta r \right) \left((r + \Delta r)\Delta q \right) \Delta z + \\
 & -t_{rq}(\Delta r\Delta z) + \left(t_{rq} + \frac{\partial t_{rq}}{\partial q} \Delta q \right) (\Delta r\Delta z) + \\
 & -t_{zr}(\Delta r\Delta q) \left(r + \frac{\Delta r}{2} \right) + \left(t_{zr} + \frac{\partial t_{zr}}{\partial z} \Delta z \right) (\Delta r\Delta q) \left(r + \frac{\Delta r}{2} \right) \\
 & -2s_z \frac{\Delta q}{2} (\Delta r\Delta z) = 0 \quad (\div r\Delta z\Delta r\Delta q) \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\partial s_r}{\partial r} r\Delta r + s_r \Delta r \right) \Delta q \Delta z + \frac{\partial t_{rq}}{\partial q} \Delta q \Delta r \Delta z + \left(\frac{\partial t_{zr}}{\partial z} \Delta z \Delta r \Delta q \right) r - s_z \Delta q (\Delta r \Delta z) = 0 \quad (\div r\Delta z\Delta r\Delta q)$$

∴

$$\frac{\partial s_r}{\partial r} + \frac{\partial t_{rq}}{\partial q} \frac{1}{r} + \frac{\partial t_{zr}}{\partial z} + \frac{s_r - s_q}{r} = 0$$

Assim, utilizando-se das condições de contorno onde o cilindro está sobre pressão constante p_i e p_o nas paredes interna e externa respectivamente e não há restrição quanto a sua movimentação, pode-se chegar à conclusão de que as tensões cisalhantes t_{rq} , t_{qz} e t_{rz} são nulas. Assim reduz-se a equação a:

$$\frac{\partial s_r}{\partial r} + \frac{s_r - s_q}{r} = 0$$

Deve-se ainda obter as equações que relacionam as deformações com os deslocamentos radial W e longitudinal U :

$$e_r = \frac{dW}{dr}; \quad e_q = \frac{W}{r}; \quad e_z = \frac{dU}{dz};$$

Equações constitutivas enunciadas pela lei de Hooke para materiais linearmente elásticos:

$$e_r = \frac{1}{E} [s_r - n(s_q + s_z)]; \quad e_q = \frac{1}{E} [s_q - n(s_r + s_z)]; \quad e_z = \frac{1}{E} [s_z - n(s_q + s_r)];$$

Logo, a equação diferencial que descreve o deslocamento é:

$$\frac{d^2W}{dR^2} + \frac{1}{r} \frac{dW}{dR} - \frac{W}{R^2} = 0 \Rightarrow W = AR + \frac{B}{R}$$

Impondo as condições de contorno, obtêm-se as equações que descrevem as tensões:

$$s_r = -p_i \frac{1}{(r_o/r_i)^2 - 1} \left((r_o/r)^2 - 1 \right) + p_o \frac{1}{(r_o/r_i)^2 - 1} \left((r_o/r_i)^2 - (r_o/r)^2 \right)$$

$$s_q = +p_i \frac{1}{(r_o/r_i)^2 - 1} \left((r_o/r)^2 + 1 \right) - p_o \frac{1}{(r_o/r_i)^2 - 1} \left((r_o/r_i)^2 + (r_o/r)^2 \right)$$

Onde:

$$A = \frac{(1-n)}{E} \left[p_i \frac{1}{(r_o/r_i)^2 - 1} + p_o \frac{1}{(r_i/r_o)^2 - 1} \right]$$

$$B = \frac{(1+n)}{E} \left[p_i \frac{1}{(1/r_i)^2 - (1/r_o)^2} + p_o \frac{1}{(1/r_o)^2 - (1/r_i)^2} \right]$$

Assim é obtida uma solução analítica para um cilindro de paredes espessas sem nenhuma condição de fixação. Esta é usada para comparação com as demais soluções obtidas no estudo.

Formulação Matemática de Cascas

Cascas são definidas como região entre duas superfícies. Para representá-las matematicamente usa-se a superfície média como referência, sendo esta o lugar geométrico dos pontos equidistantes às duas superfícies. A espessura da casca é dada pela soma das distâncias entre a superfície média e as superfícies externas ao longo da normal da primeira. Assim, através da caracterização da superfície média e da espessura ao longo desta, pode-se definir matematicamente a casca.

- **Superfície média**

Para a definição geométrica deste, utilizou-se dois referenciais ortogonais. Um global, tridimensional e outro local bidimensional de coordenadas curvilíneas longitudinal (\mathbf{x}) e circunferência (\mathbf{q}). Assim, pode-se caracterizar as coordenadas globais através das locais como na expressão:

$$\hat{X}(\mathbf{x}, \mathbf{q}) = f_1(\mathbf{x}, \mathbf{q})\hat{e}_1 + f_2(\mathbf{x}, \mathbf{q})\hat{e}_2 + f_3(\mathbf{x}, \mathbf{q})\hat{e}_3$$

Sendo $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ os vetores da base canônica do referencial global.

Para que a superfície média seja axissimétrica ao fixar-se a variável \mathbf{x} deve obter-se um círculo. Portanto reescrevendo \hat{X} :

$$\hat{X}(\mathbf{x}, \mathbf{q}) = r(\mathbf{x})\cos(\mathbf{q})e_1 + r(\mathbf{x})\sin(\mathbf{q})e_2 + z(\mathbf{x})e_3$$

Sendo $r(\mathbf{x})$ e $z(\mathbf{x})$ as coordenadas que definem a geratriz, linha que girada em torno do eixo e_3 define a forma da casca.

Outras variáveis importantes são, a variação do comprimento do vetor posição ds e os raios principais de curvatura R_1 e R_2 e esta é descrita, segundo [Harry, 2004], na equação:

(Melhorando a nomenclatura: $s' = \frac{ds}{d\mathbf{x}}, r' = \frac{dr}{d\mathbf{x}}, z' = \frac{dz}{d\mathbf{x}}$.)

$$\left(\frac{ds}{d\mathbf{x}}\right)^2 = \left(\frac{dr(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}}\right)^2 + \left(\frac{dz(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}}\right)^2$$

$$R_1 = \frac{s'^3}{r''z' - z''r'}$$

$$R_2 = \frac{s'r}{z'}$$

Para descrever totalmente a casca e representar a espessura é acrescentado ao referencial local um eixo perpendicular cuja variável associada é \mathbf{z} . Considerando a

espessura da casca como sendo h , defini-se outra variável: $T = \frac{h}{2}\mathbf{z}$

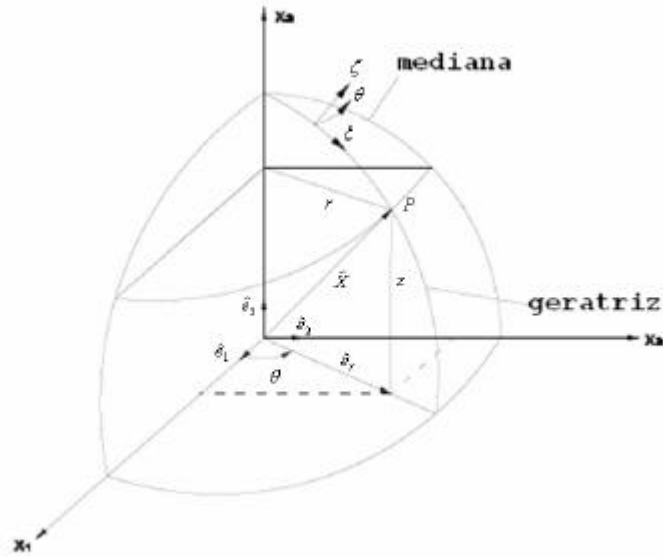


Figura 2 - Sistemas de Coordenadas

• **Deformações e Deslocamentos**

Os deslocamentos nas direções locais $(\mathbf{x}, \mathbf{q}, \mathbf{z})$ são respectivamente U_1, U_2 e W . Desta forma segundo [Harry, 2004] as deformações podem ser escritas nas formas:

$$\mathbf{e}_{xx} = \frac{1}{s' \left(1 + \frac{T}{R_1}\right)} \left(\frac{\partial U_1}{\partial \mathbf{x}} + \frac{U_2}{r} \frac{\partial s'}{\partial \mathbf{q}} + \frac{s'W}{R_1} \right) = \frac{1}{s' \left(1 + \frac{T}{R_1}\right)} \left(\frac{\partial U_1}{\partial \mathbf{x}} + \frac{s'W}{R_1} \right)$$

$$\mathbf{e}_{qq} = \frac{1}{r \left(1 + \frac{T}{R_2}\right)} \left(\frac{\partial U_2}{\partial \mathbf{q}} + \frac{U_1}{s'} r' + \frac{rW}{R_2} \right) = \frac{1}{r \left(1 + \frac{T}{R_2}\right)} \left(\frac{U_1}{s'} r' + \frac{rW}{R_2} \right)$$

$$\mathbf{e}_{zz} = \frac{\partial W}{\partial T}$$

$$\mathbf{g}_{xq} = \frac{r \left(1 + \frac{T}{R_2}\right)}{s' \left(1 + \frac{T}{R_1}\right)} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left(\frac{U_2}{r \left(1 + \frac{T}{R_2}\right)} \right) + \frac{s' \left(1 + \frac{T}{R_1}\right)}{r \left(1 + \frac{T}{R_2}\right)} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left(\frac{U_1}{s' \left(1 + \frac{T}{R_1}\right)} \right) = 0$$

$$\mathbf{g}_{xz} = \frac{1}{s' \left(1 + \frac{T}{R_1}\right)} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{x}} + s' \left(1 + \frac{T}{R_1}\right) \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{U_1}{s' \left(1 + \frac{T}{R_1}\right)} \right)$$

$$\mathbf{g}_{qz} = \frac{1}{r \left(1 + \frac{T}{R_2}\right)} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{q}} + r \left(1 + \frac{T}{R_2}\right) \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{U_2}{r \left(1 + \frac{T}{R_2}\right)} \right) = 0$$

Formulação Numérica

Utilizando o método dos elementos finitos [Bathe, 1995], considerou-se a partição do contínuo em pequenos elementos de geometria simples, neste caso casca com simetria axial, nos quais são impostas condições de compatibilidade e equilíbrio para obterem-se as funções que descrevem as variáveis desejadas. Usualmente, no caso estrutural, utiliza-se um conjunto de funções para descrever os deslocamentos no interior de cada elemento a partir de graus de liberdade nodais (funções de forma convencionais). Este método pode ser empregado em estruturas unidimensionais, bidimensionais (caso presente) e tridimensionais.

$U = U_0 + U_1 T + F_1 T^2 + Y_1 T^3$ Neste caso de estruturas com elementos cuja geometria é uma casca axissimétrica (ex.: cilindros, esferas), admite-se que o deslocamento longitudinal em um elemento é dado por uma função cúbica e o radial é dado por uma combinação linear entre a solução analítica para o caso de vasos esféricos e cilíndricos [1]. Os elementos podem ser distribuídos de acordo com a necessidade do usuário podendo concentrá-los nos pontos cuja variação dos deslocamentos seja maior.

$$U = U_0 + U_1 T + F_1 T^2 + Y_1 T^3 \text{ e } W = W_0 + \frac{W_1}{R} + W_2 R + \frac{W_3}{R^2}$$

Usando as equações constitutivas para materiais linearmente elásticos segundo a lei de Hooke e aplicando a condição de contorno de nulidade nas paredes interna e externa da tensão cisalhante, é possível extrair duas variáveis das equações acima. Assim segundo [Harry,2004] :

$$f_1 = -\frac{2R_1(h-3R_1)}{h(h^2-12R_1^2)s'} \frac{\partial W}{\partial x_{z=+1}} - \frac{2R_1(h+3R_1)}{h(h^2-12R_1^2)s'} \frac{\partial W}{\partial x_{z=-1}} + \frac{4R_1}{(h^2-12R_1^2)} \left[\frac{U_0}{R_1} - Y_1 \right]$$

$$\Psi_1 = \frac{2R_1(4R_1-h)}{h^2(h^2-12R_1^2)s'} \frac{\partial W}{\partial x_{z=+1}} + \frac{2R_1(4R_1+h)}{h^2(h^2-12R_1^2)s'} \frac{\partial W}{\partial x_{z=-1}} + \frac{16R_1^2}{h^2(h^2-12R_1^2)} \left[\frac{U_0}{R_1} - Y_1 \right]$$

Conhecendo as variáveis necessárias para o cálculo do deslocamento, pode-se a partir do método de energia que minimiza a função de energia potencial $d\Pi = 0$:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{e}^T \hat{\mathbf{s}} dV - \int_A \hat{u}_A^T \hat{\mathbf{F}}_A dA \Rightarrow d\Pi = \frac{1}{2} \int_V d\mathbf{e}^T \hat{\mathbf{s}} dV - \int_A d\hat{u}_A^T \hat{\mathbf{F}}_A dA = 0$$

Onde \hat{u} é o vetor dos deslocamentos, $\hat{\mathbf{F}}_A$ é a força de superfície, a pressão que atua no cilindro, $\mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_{xx} & e_{yy} & e_{zz} & g_{xy} & g_{yz} & g_{zx} \end{bmatrix}$ vetor das deformações e $\hat{\mathbf{s}}^T = \begin{bmatrix} s_{xx} & s_{yy} & s_{zz} & s_{xy} & s_{yz} & s_{zx} \end{bmatrix}$.

Por hipótese o material obedece a lei de Hooke então: $\hat{\mathbf{s}} = C\mathbf{e}$. C é a matriz constitutiva das propriedades elásticas do material.

O domínio é dividido em elementos e é feita uma aproximação para o campo de deslocamentos \hat{u} em cada elemento através das variáveis que os representam agrupadas no vetor $\hat{U} = \left[U_0^{(1)} \quad Y_1^{(1)} \quad W_0^{(1)} \quad W_1^{(1)} \quad W_2^{(1)} \quad W_3^{(1)} \quad \dots \quad U_0^{(i)} \quad Y_1^{(i)} \right]$, i representa o nó associado com as variáveis. Assim, para todo elemento n [Harry,2004]:

$$\hat{u} = H_{(xyz)}^{(n)} \hat{U}.$$

Com as equações das deformações em função dos deslocamentos, pode-se fazer o mesmo com relação a estas e criar uma matriz que relaciona as variáveis dos deslocamentos dos nós de um elemento ao campo de deformações [Harry,2004].

$$\mathbf{e} = B_{(xyz)}^{(n)} \hat{U}^{(n)}$$

Logo a equação de minimização fica:

$$d\Pi = \frac{1}{2} \int_V d\hat{U}^T B^T C B \hat{U} dV - \int_A d\hat{U}^T H^T \hat{F}_A dA = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \int_V B^T C B \hat{U} dV = \int_A H^T \hat{F}_A dA \equiv K\hat{U} = \hat{R}$$

nde $K = \frac{1}{2} \int_V B^T C B dV$ e $\hat{R} = \int_A H^T \hat{F}_A dA$.

O algoritmo se divide então em duas partes, uma que calcula a matriz K e outra que calcula o vetor \hat{R} .

Os elementos que fazem a discretização do problema contínuo são unidimensionais, sua geometria é um arco de cilindro de 1° e seu comprimento é ditado pela divisão da malha. Estes possuem 4 nós distribuídos de acordo com a figura [Fig] e as coordenadas e deslocamento na direção longitudinal são interpoladas através de polinômios de Lagrange.

$$h_1(\mathbf{x}) = \frac{(-9\mathbf{x}^3 + 9\mathbf{x}^2 + \mathbf{x} - 1)}{16} \quad ; \quad h_2(\mathbf{x}) = \frac{(9\mathbf{x}^3 + 9\mathbf{x}^2 - \mathbf{x} - 1)}{16} ;$$

$$h_3(\mathbf{x}) = \frac{(27\mathbf{x}^3 - 9\mathbf{x}^2 - 27\mathbf{x} + 9)}{16} \quad ; \quad h_4(\mathbf{x}) = \frac{(-27\mathbf{x}^3 - 9\mathbf{x}^2 + 27\mathbf{x} + 9)}{16}$$

$$r(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^4 h_i(\mathbf{x})r_i \quad ; \quad z(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^4 h_i(\mathbf{x})z_i$$

$$U_0(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^4 h_i(\mathbf{x})U_0^i \quad ; \quad Y_1(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^4 h_i(\mathbf{x})Y_1^i$$

$$W_0(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^4 h_i(\mathbf{x})W_0^i \quad ; \quad W_1(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^4 h_i(\mathbf{x})W_1^i$$

$$W_2(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^4 h_i(\mathbf{x})W_2^i \quad ; \quad W_3(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^4 h_i(\mathbf{x})W_3^i$$

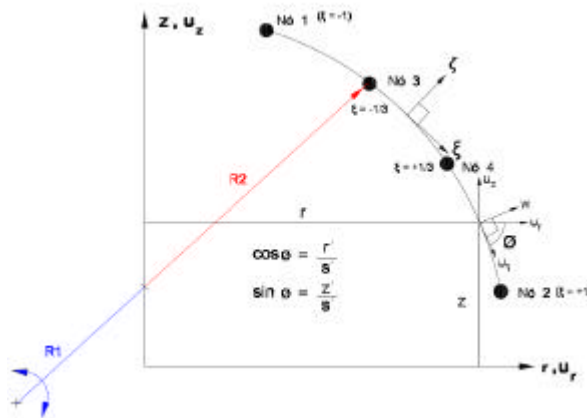


Figura 3 - Elementos axissimétrico de 4 nós

Desta forma o Sistema se torna discretizado e linear, podendo ser resolvido apenas com a inversão de uma matriz. Porém, ainda é desejado impor outras restrições ao modelo como a continuidade. Para isso é aplicado o método das penalidades descrito em [Harry,2004], onde é somado à função a ser minimizada, o quadrado das funções restrição a serem prescritas multiplicadas por uma variável \mathbf{a} de ajuste de ordem de grandeza para que seja feita a minimização da função quanto a prescrição da restrição.

No Programa são implementadas duas penalidade, a de continuidade, responsável por garantir a continuidade do deslocamento axial nas paredes interna e externa e a penalidade de fixação, responsável por garantir a fixação de uma secção reta em um nó. Desenvolveu-se uma série de testes para encontrar um valor para \mathbf{a} que garantisse a condição em diversas malhas e não comprometer a minimização da função de potencial.

Vê-se que para os gráficos dos deslocamentos não apresentam diferenças maiores do que $1 \times 10^{-3}\%$ o que aparentemente significaria que a variação de \mathbf{a} não influencia muito na solução. Mas ao observar os gráficos das tensões principalmente o de tensões radiais, fica claro que as soluções onde $\mathbf{a} = 10^8$ ou $\mathbf{a} = 10^{12}$ não atendem às condições de contorno das tensões na parede interna onde $\mathbf{s}_{zz} = -p_i$. Quando o valor de $\mathbf{a} = 10^8$ então as tensões oscilam muito próximas à extremidade fixa, enquanto se $\mathbf{a} = 10^{12}$ então as tensões oscilações ocorrem ao longo de todo o comprimento significando que \mathbf{a} é tão grande que o termo de restrição tem mais peso na minimização do que a própria energia potencial.

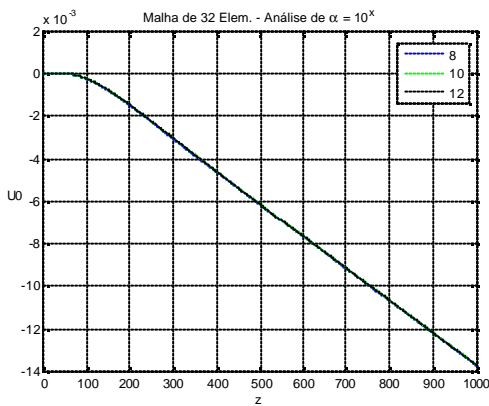


Figura 4 – Deslocamento U_0 da Superfície Média

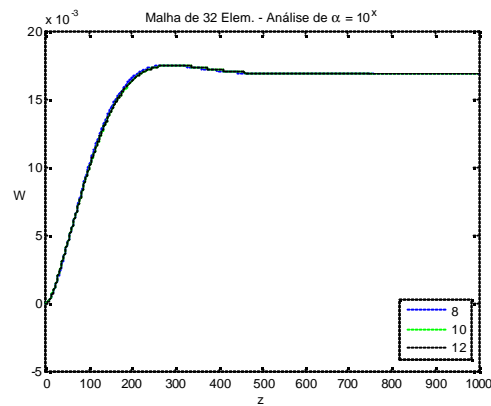


Figura 5 – Deslocamento W da Superfície Média

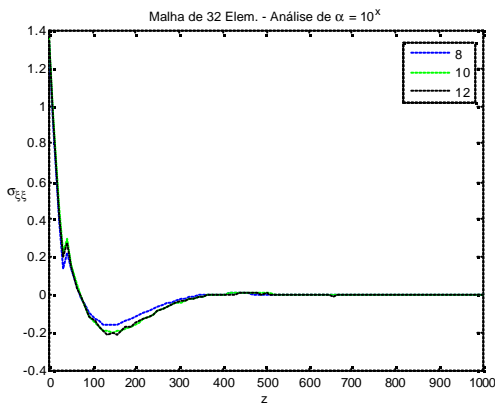


Figura 6 - Tensão Axial na Superfície Interna

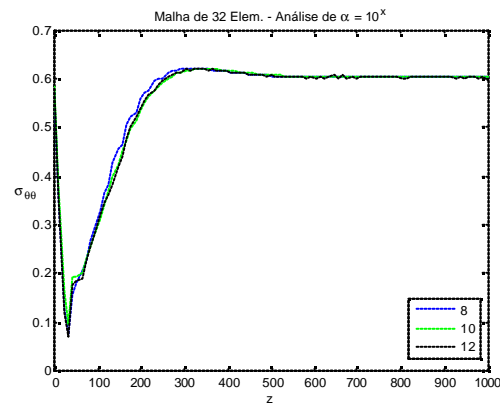


Figura 7 - Tensão Circunferencial na Superfície Interna

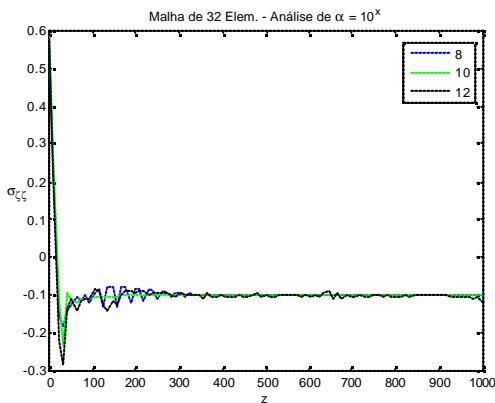


Figura 8 - Tensão Radial na Superfície Interna

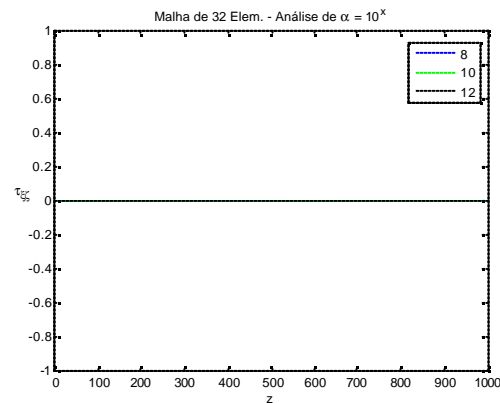
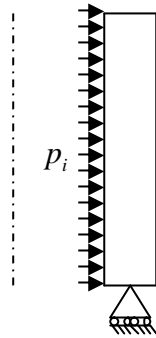


Figura 9 - Tensão Cisalhante na Superfície Interna

Casos

- Caso 1: Duas extremidades Livres



$$\begin{aligned} r &= 300mm \\ h &= 50mm \\ L &= 1000mm \\ E &= 10000MPa \\ \nu &= 0.3 \\ p_i &= 0.1MPa \end{aligned}$$

As duas extremidades livres na direção radial e uma fixa longitudinalmente apenas para manter um referencial. Essa condição é idêntica a condição da solução analítica apresentada por tanto, comparações entre as soluções de cada um são apresentadas.

Na solução analítica os resultados para os deslocamentos na superfície média são constantes e iguais a $W = 0.0168318$ e $U_{\max} = -0.0151250$ já na solução numérica são $W = 0.0168320$ e $U_{\max} = -0.0151253$. O erro encontrado entre estes é da ordem de 0.01% considerado muito pequeno para a uma malha com apenas um elemento.

Na solução analítica a equação do deslocamento W pode ser expressa por uma função :

$$W = A \cdot R + \frac{B}{R}$$

Na solução numérica a equação proposta para o deslocamento W é:

$$W = W_0 + \frac{W_1}{R} + W_2 \cdot R + \frac{W_3}{R^2}$$

Os valores encontrados para W_1 e W_2 devem ser iguais a B e A o que se verifica na solução. As variáveis W_0 e $\frac{W_3}{R^2}$ devem ser desprezíveis comparados com o valor de W . Assim,

$$\frac{W_0}{W} \cong \frac{W_3}{WR^2} \cong 1e^{-3} \text{ que é a ordem de imprecisão entre os valores.}$$

As tensões deste caso são constantes ao longo da direção longitudinal, mas não na radial. Nesta, as tensões obedecem às condições de contorno na parede interna a tensão radial é igual a menos a pressão $s_r = -p_i$ as tensões axiais e cisalhantes são nulas e a tensão circunferencial é igual ao valor da solução analítica $s_{\theta\theta} = 0.6042MPa$. Na parede externa as tensões também correspondem às condições de contorno sendo todas elas nulas com a exceção da circunferencial que também corresponde a resposta analítica $s_{\theta\theta} = 0.5042MPa$.

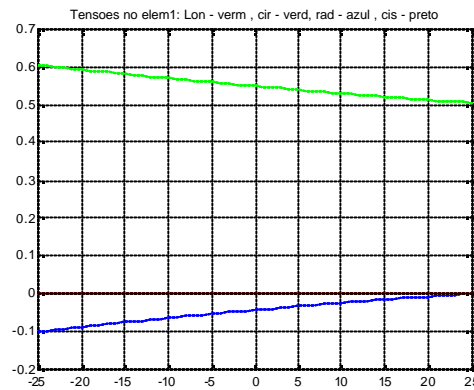
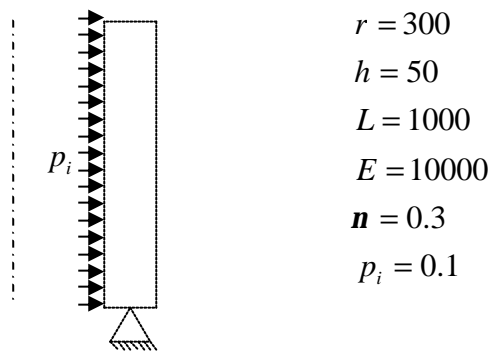


Figura 10 – Tensões ao longo da espessura do cilindro

- Caso 2: Extremidade Inferior Fixa e Superior Livre



O caso Pinado-Livre descreve a situação onde o ponto médio da secção reta de um extremidade está fixo deixando livre todo o resto do cilindro. O estudo não conseguiu encontrar solução analítica para este problema bem como para os seguinte, logo a análise feita a respeito destes é meramente qualitativa.

Quanto aos deslocamentos do ponto médio da secção reta, pode-se ver que o modelo consegue atender as condições de fixação na extremidade inferior e suavemente transita para o comportamento do cilindro livre-livre onde a variação é constante. Verifica-se também que para este caso a malha de 8 elemento já apresenta resultados bem parecidos com malhas de ordem maior. Na região de transição, é observado que as soluções ainda apresentam alguma distinção sendo apenas as malhas de 64 e 128 elementos as com menos diferença. Além disso é possível visualizar nos gráficos [13-14] o deslocamento longitudinal dos pontos das secções transversais de cada um dos nós de um elemento que mostra a rotação esperada no elemento 1 e no ultimo elemento a rotação não é observada pois o efeito local da restrição do nó não influencia mais o cilindro.

Observa-se que as tensões não são constantes na direção longitudinal e por isso o gráfico das tensões ao longo da espessura é diferente da forma analítica existindo tensões cisalhantes e longitudinais apenas na região mais próxima da restrição. As condições de contorno para as tensões (cisalhamento e tensões normais nas paredes internas e externas) da são observadas em todos os elementos da malha menos no primeiro onde as tensões não são bem representadas pelo modelo usado. A convergência das malhas com relação às tensões só acontece com malhas com mais elementos do que necessários para o mesmo com relação aos deslocamentos. Se comparados, uma malha de 8 elementos apresenta resultados de deslocamentos com erros menores que 0.01% do que uma malha de 16 elementos, já as tensões só reproduzem este resultado em malhas a partir de 128 ele. Mesmo neste caso pode-se ver que as tensões não satisfazem as condições de contorno perto da extremidade com a restrição.

O programa desenvolvido também permite a fácil criação de malhas com concentração de elementos em regiões desejadas. Isto pode ser usado para obter resultados semelhantes com malhas de tamanho muito menor aumentando a eficiência das análises realizadas. Esses resultados podem ser comparados observando-se as figuras[23-25] onde são comparadas duas malhas, uma com 128 elementos homogeneamente distribuídos e outra com 20 elementos, 16 distribuídos entre a extremidade fixa e os 400 primeiros milímetros e 4 ao longo do comprimento restante.

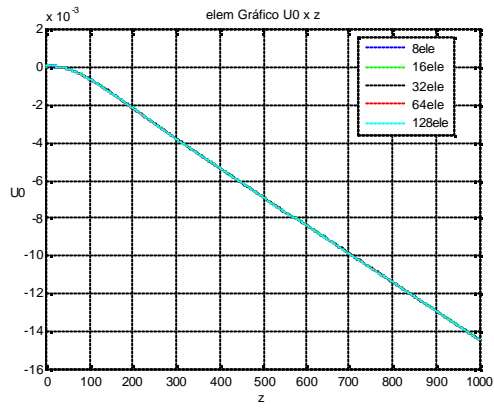


Figura 11– Deslocamento U_0 da Superfície Média

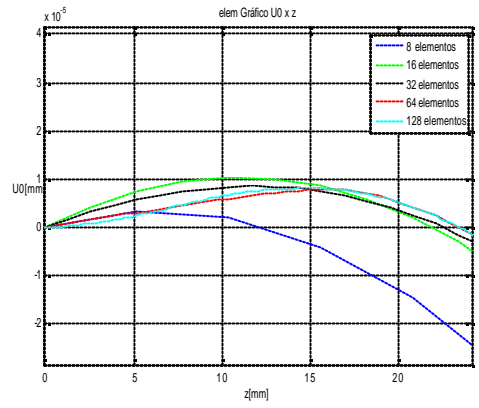


Figura 12– Deslocamento U_0 -Zoom de $z=[0;25]$ mm

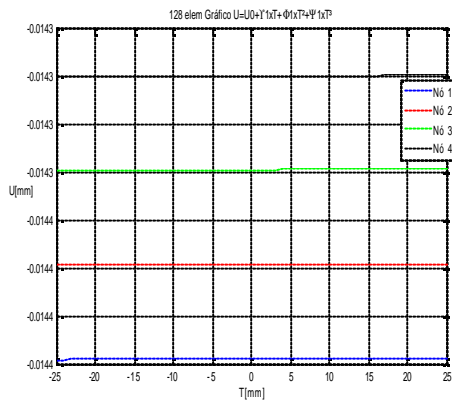


Figura 13– Deslocamento U_x Espessura (Elemento 128)

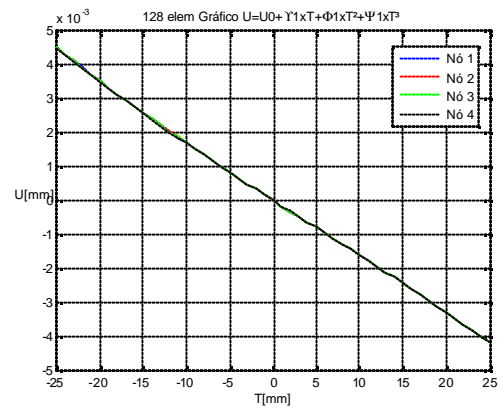


Figura 14– Deslocamento U_x Espessura (Elemento 1)

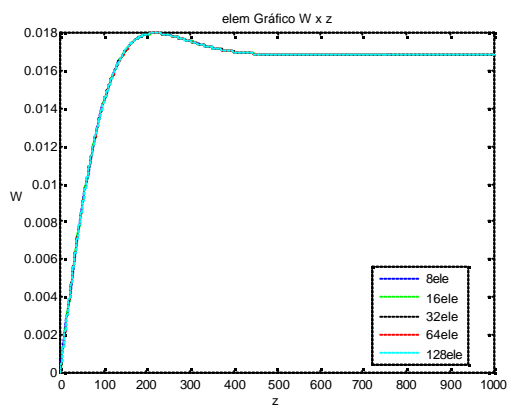


Figura 15– Deslocamento W da Superfície Média

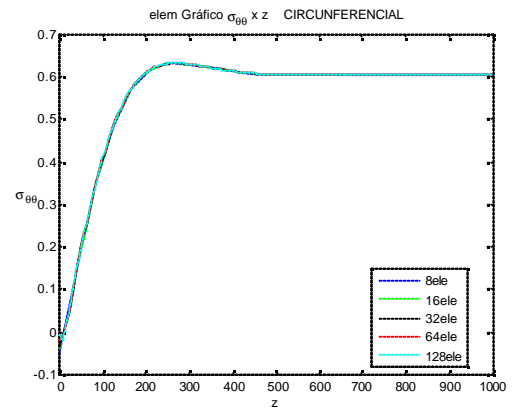


Figura 16 - Tensão Circunferencial na Superfície Interna

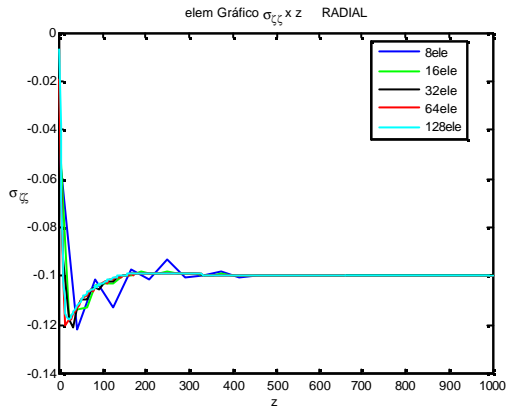


Figura 17- Tensão Radial na Superfície Interna

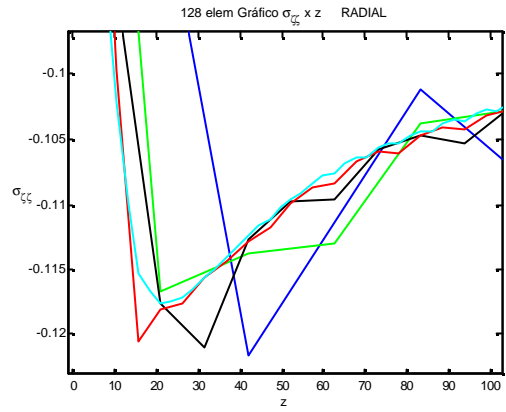


Figura 18 - Tensão Radial -Zoom de z=[0;100]mm

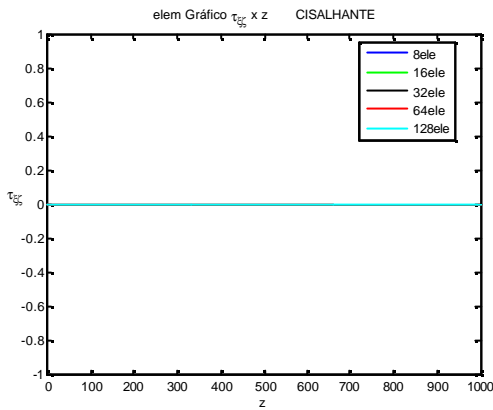


Figura 19 - Tensão Cisalhante na Superfície Interna

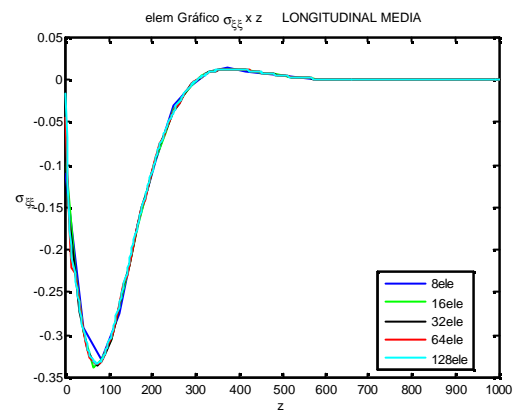


Figura 20 - Tensão Longitudinal na Superfície Interna

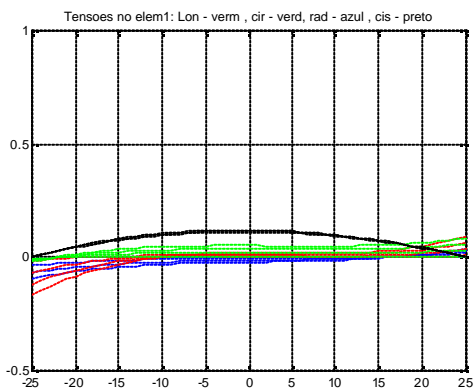


Figura 21 - Tensões ao longo da espessura do cilindro (elemento 1)

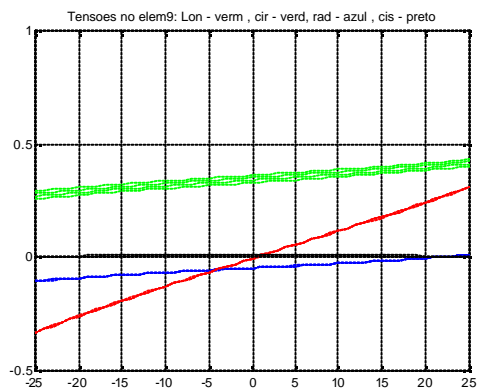


Figura 22 - Tensões ao longo da espessura do cilindro (elemento 9)

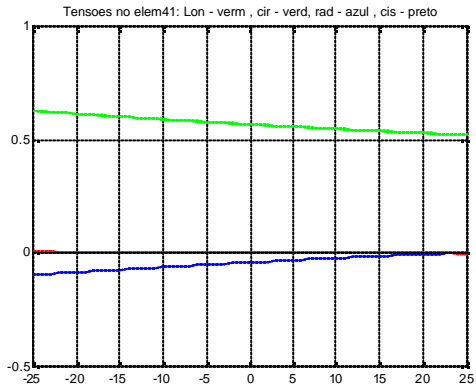


Figura 23 - Tensões ao longo da espessura do cilindro (elemento 41)

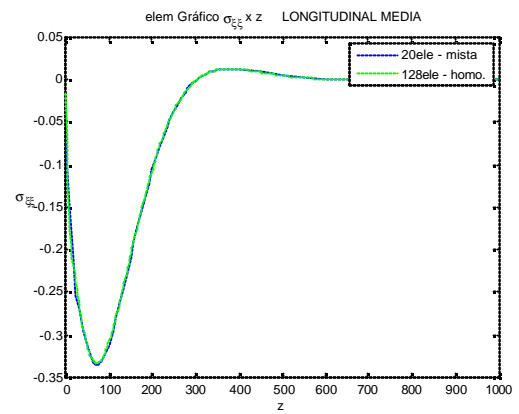


Figura 24 - Comparação da Tensão Axial Malha Mista e Homogênea

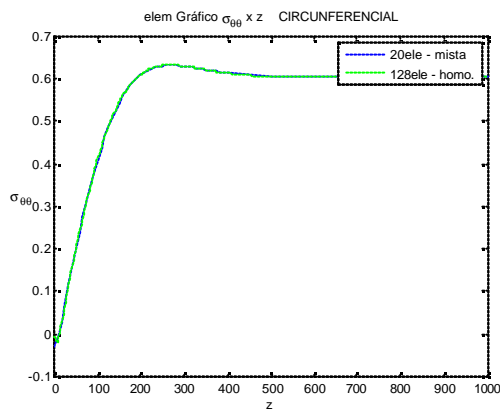


Figura 25 - Comparação da Tensão Circunferencial Malha Mista e Homogênea

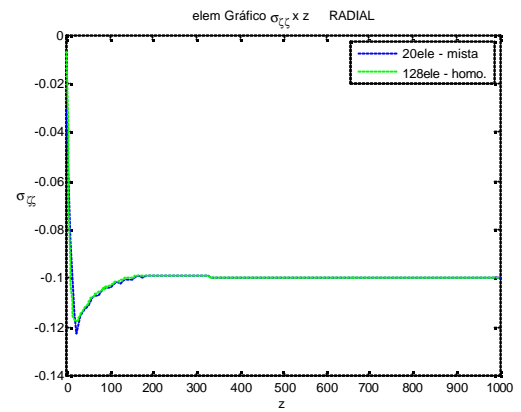
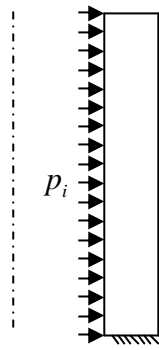


Figura 26 - Comparação da Tensão Radial Malha Mista e Homogênea

- Caso 3: Estremidade Inferior Engastada e Superior Livre



$$r = 300$$

$$h = 50$$

$$L = 1000$$

$$E = 10000$$

$$\mathbf{n} = 0.3$$

$$p_i = 0.1$$

Situação onde toda a face inferior do cilindro fica imóvel. Assim é necessário a aplicação da condição de contorno de fixação da rotação de uma secção reta, o que no modelo é feito através da aplicação da penalidade de fixação.

Este caso é muito parecido com anterior sendo necessário observar que a variação do deslocamento W com relação ao comprimento é suavizada (NULA) na restrição. Observa-se também que o deslocamento longitudinal é nulo ao longo da secção reta na restrição segundo mostra figura [Fig].

As tensões não apresentam grandes diferenças do caso anterior atendendo as condições de contorno não impostas no modelo matemático nas regiões afastadas da extremidade restrita. É verificada a suavização na sua variação na região de engastamento.

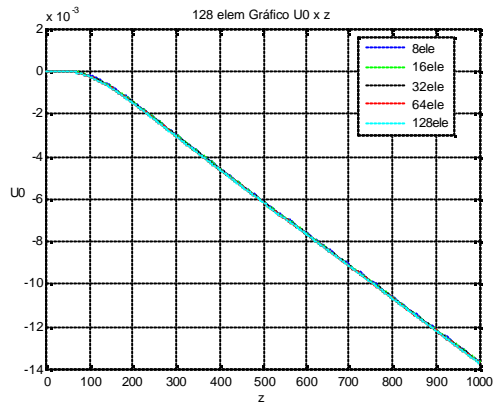


Figura 27– Deslocamento U_0 da Superfície Média

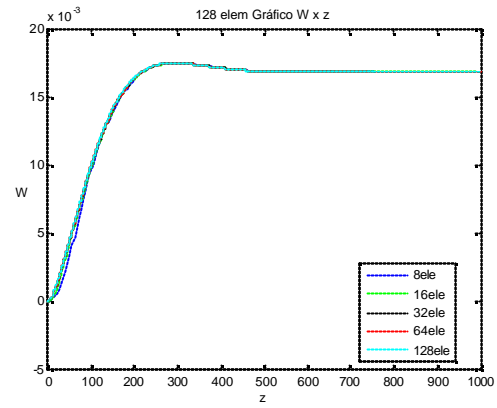


Figura 28– Deslocamento W da Superfície Média

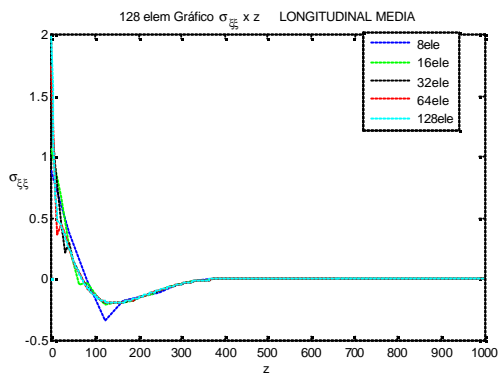


Figura 29- Tensão Axial na Superfície Interna

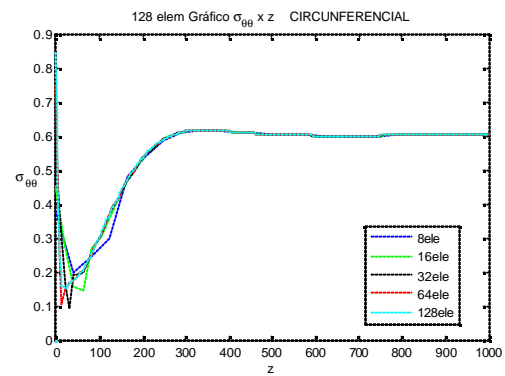


Figura 30 - Tensão Circunferencial na Superfície Interna

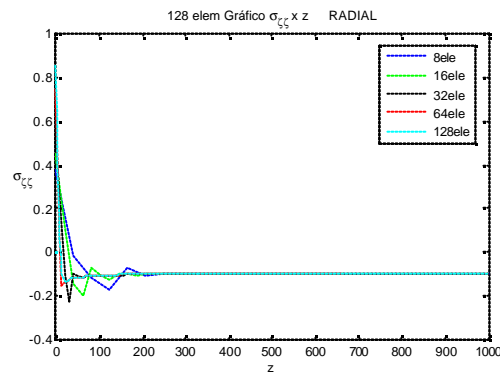
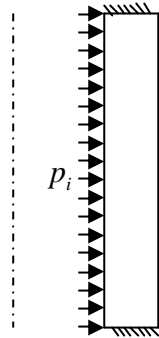


Figura 31- Tensão Radial na Superfície Interna

- Caso 4: As Duas Extremidades Engastadas – Efeito St. Venant

O efeito St. Venant é observado em um caso onde nas duas extremidades são impostas condições de fixação e o comprimento do cilindro não é suficiente para dissipar o efeito local da restrição. Assim pode-se comparar 2 casos bi-engastados com malhas de 128 elementos e comprimentos $L = 1500$ e $L = 600$.



$$r = 300$$

$$h = 50$$

$$L = 1500 \text{ ou } 600$$

$$E = 10000$$

$$\nu = 0.3$$

$$p_i = 0.1$$

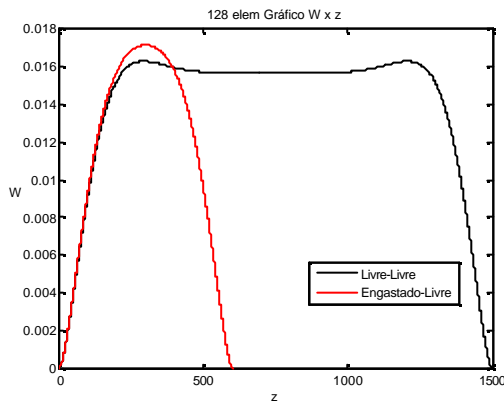


Figura 32– Deslocamento W da Superfície Média

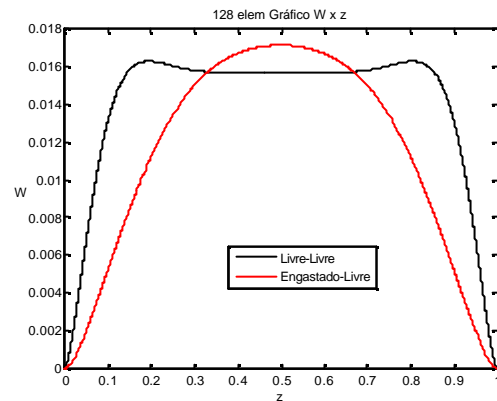
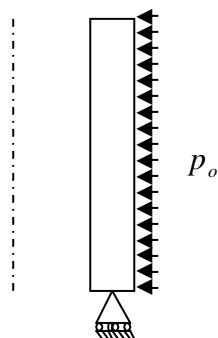


Figura 33– Deslocamento W da Superfície Média com coordenada z parametrizada

Ao reduzir o comprimento do cilindro os efeitos locais são somados e assim, o deslocamento máximo aumenta em 2.44 vezes o valor de overshoot do cilindro longo. Comparando com os outros cilindros, pode-se ver que o cilindro tem uma maior resistência ao deslocamento como já era esperado.

- Caso 5: Pressão externa



$$r = 300$$

$$h = 50$$

$$L = 1500 \text{ ou } 600$$

$$E = 10000$$

$$\nu = 0.3$$

$$p_o = 0.1$$

È possível rodar no programa, casos onde a pressão é externa. Como a pressão só modifica o vetor \hat{R} na solução $K\hat{U} = \hat{R}$, não são necessários outros exemplos para validar o modelo nesta condição uma vez que a rigidez da malha, a continuidade e a fixação já foram analisadas em casos anteriores.

Na solução analítica os resultados para os deslocamentos na superfície média são constantes e iguais a $W = -1.89320 \times 10^{-2}$ e $U_{\max} = 3.16882 \times 10^{-2}$. O erro encontrado entre esta e a solução numérica é da ordem de 0.01% considerado muito pequeno para a uma malha com apenas um elemento.

Comparando os valores das variáveis relacionadas ao deslocamento W como fito para o 1º caso observa-se que encontrados para W_1 e W_2 devem são iguais a B e A da solução analítica e as variáveis W_0 e W_3 / R^2 que devem ser desprezíveis comparados com o valor de W segundo a relação: $\frac{W_0}{W} \cong \frac{W_3}{WR^2} \cong 1e^{-3}$ que é a ordem de imprecisão entre os valores numérico e analítico.

As tensões deste caso são constantes ao longo da direção longitudinal, mas não na radial. Nesta, as tensões obedecem às condições de contorno na parede externa a tensão radial é igual a menos a pressão $s_r = -p_o$, as tensões axiais e cisalhantes são nulas e a tensão circunferencial é igual ao valor da solução analítica $s_{qq} = -0.6042 MPa$. Na parede interna as tensões também correspondem às condições de contorno sendo todas elas nulas com a exceção da circunferencial que também corresponde à resposta analítica $s_{qq} = -0.7042 MPa$.

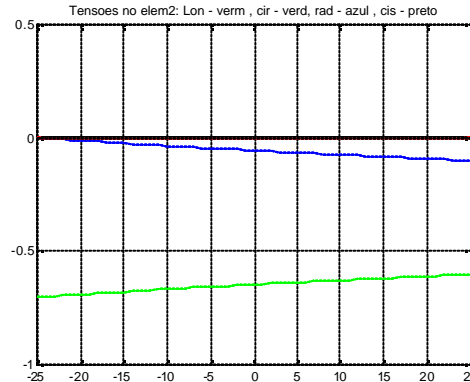


Figura 34 - Tensões ao longo da espessura do cilindro

Conclusões

Da implementação e de testes realizados, através de um programa de elementos finitos, verifica-se que a análise estrutural de cascas com espessuras que caracterizam serem finas ou espessas pode ser tratado numericamente de forma unificada, possibilitando fácil comparação entre casos. Este programa possui uma interface gráfica que permite o tratamento de várias análises numéricas simultaneamente. Esta característica é especificamente importante na avaliação da convergência das soluções, para discretizações crescentes da estrutura (convergência monotônica).

A fácil adaptação da malha para maior concentração de elementos nas regiões de maior variação, mostram o quanto o programa barateia o modelo de análise dos vasos de pressão, diminuindo o esforço computacional necessário para o estudo destes.

O estudo de casos mostra a consistência dos resultados comparados com a solução analítica disponível, faltando aos casos mais complexos a comparação com soluções de outros modelos numéricos como por exemplo as soluções de programas comerciais.

Referências

- 1 - Espinoza, Harry G. S. **Formulação de Cascas Espessas Axissimétricas Utilizando Elementos Finitos Enriquecidos**. PUC-Rio, Departamento de Engenharia Mecânica, Dissertação de Mestrado, 2004, 107p.
- 2 - Bathe, Klaus-Jürgen. **Finite Element Procedures**, Prentice Hall, 1996. 1037p.