Projeto de Iniciação Científica – Pibic

Conjunto de Cantor como Fecho de uma Órbita no Círculo

Alunos: Pedro Chaves Meurer Moreira

Orientador: Flavio Erthal Abdenur

Objetivos:

1) Mostrar que existe um ponto cuja órbita por uma aplicação expansora de grau 3 no círculo é densa no conjunto de Cantor ternário
2) Obter uma aproximação explícita para esse ponto.

Conceitos básicos de dinâmica:

Um sistema dinâmico, dito de forma informal, é algo que evolui ao longo do tempo por alguma regra matemática. Essa regra pode assumir várias formas, mas, neste projeto, ela será uma aplicação (função) entre dois espaços métricos.

Um espaço métrico é um conjunto X dotado de uma função permite a noção de distância nesse conjunto. Essa função é denominada métrica e é da forma:

$d: X \times X \rightarrow IR^+$

O espaço métrico que utilizaremos será o circulo de comprimento unitário que tem como distancia a função d_{S_1} definida da seguinte forma:

Dados dois pontos [x], [y] pertencentes a S_1, $d_{S_1}([x],[y]) \equiv \min\{|x-y|, |x-y-1|, |x-y+1|\}$.

O Círculo:

Existem várias formas de definir o círculo (S_1) de comprimento unitário. Optaremos por uma que nos favorecerá no estudo a ser feito:

$S_1 = IR/Z$

Isto é, o círculo será o intervalo fechado I = [0,1], o qual percorrido de forma crescente, equivale ao sentido horário do circulo. O ponto 0 é identificado com o ponto 1, e é representado geometricamente pelo "pólo norte" do círculo.

Iterações e Órbitas:

Considere uma aplicação bijetiva $f:S_1 \rightarrow S_1$

Definimos uma iteração como a aplicação dessa função em um determinado ponto x do circulo. Considere a composição sucessiva dessa função nas imagens obtidas. Tem-se uma seqüência infinita {x, f(x), f(f(x)), f(f(f(x))) ... } de pontos x pertencentes a S_1.

A n-ésima iteração do ponto x por f será representada por $f^n(x)$. Sendo f uma bijeção pode-se iterar x por f^{-1}.

Pode-se inferir dessas definições noção de tempo, em que as iterações por f representariam o futuro e por f^{-1} o passado.

Definição de órbita: Dado f: $S_1 \to S_1$ e x pertencente a S1 a *órbita futura* de x é o conjunto $O^+(x) = \{f^n(x) : n$ pertencente a IN$\}$

A órbita passada é análoga para o conjunto $O^-(x) = \{f^{-n}(x) : n \in IN\}$.

Transitividade:

Definição: Dizemos que uma aplicação f: $X \to X$ é topologicamente transitiva se existe x pertencente a X tal que fecho($O^+(x)$) = X.

A dinâmica de T_3

T_3 é definida como aplicação $T_3 : S_1 \to S_1$ tal que $T_3(x) = 3x \mod(1)$, para ficar bem definida no círculo.

Geometricamente, essa aplicação corresponde a esticar o círculo até o triplo do seu tamanho ("3x[0,1]") e enrolá-lo de volta no próprio círculo no sentido horário, dando três voltas completas (mod(1)).

Algumas observações podem ser feitas:

1. T_3 é uma aplicação expansora de grau 3 do círculo nele mesmo;
2. T_3 é uma sobrejeção contínua do circulo;
3. T_3 tem pontos periódicos de todos os períodos possíveis;
4. T_3 transitiva.

Essas observações foram retiradas do nosso livro de refêrencia, onde são desenvolvidas cuidadosamente.

Homeomorfismo econjugação:

Definição: Uma aplicação h: $X \to Y$ entre dois espaços métricos é um *homeomorfismo* se f é bijetiva, continua, e sua inversa f^{-1} também é continua.

Dois sistemas dinâmicos f: $X \to X$ e g: $Y \to Y$ são ditos *topologicamente conjugados* se existe um homeomorfismo h: $X \to Y$, dito uma *conjugação topológica*, tal que vale
$h(f(x)) = g(h(x))$
para todo ponto x de X. Neste caso as dinâmicas de f e g têm propriedades idênticas do ponto de vista topológico (e.g, número de pontos periódicos, transitividade, minimalidade)

Dinâmica simbólica:

A construção da dinâmica simbólica de um certo sistema dinâmico consiste em dividir o conjunto onde o sistema está em n subconjuntos e relacionar cada um deles a um símbolo.

Afirmamos, com base na nossa referência bibliográfica, que para uma aplicação T_k do circulo nele mesmo, existe uma dinâmica simbólica que é topologicamente conjugada a T_k, em que o círculo deve ser dividido em k partes.

Como usaremos T_3, aplicação expansora linear, o círculo será dividido em 3 partes iguais.

O novo espaço métrico que utilizado será o espaço de todas as seqüências de símbolos As, Bs e Cs, o qual denominaremos $\sum_3$. Isto é, x em $\sum_3$ é uma seqüência da forma

$x = \{x_0, x_1, x_2,...\}$ tal que x_j pertence a {A, B, C} para cada j em IN* ≡ (IN U {0}).

Agora definiremos a função distância em $\sum_3$.

Definiremos antes uma função auxiliar $d^*: (\{A, B, C\}) \times (\{A, B, C\}) \rightarrow \{0,1,2\}$, dada por:

$d^*(\alpha, \beta) \equiv \{$

0, se $\alpha = \beta$

2, se $\alpha = A$ e $\beta = C$ ou

$\alpha = C$ e $\beta = A$

1, caso contrário

}

Podemos assim, definir a métrica para o espaço $\sum_3$. d: $\sum_3 \times \sum_3$ IR^+ é dada por:

$d(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} d^*(x_i, y_i)/3^i$ em que x, y são seqüências de As Bs e Cs.

Pode-se verificar que d é de fato uma métrica em $\sum_3$ pois atende aos três axiomas básicos de métrica:

1. $d(x, y) = 0$ se, e somente se $x = y$. Demonstração trivial

2. $d(x, y) = d(y, x)$ para todos x, y em $\sum_3$. Demonstração trivial.

3. Dados 3 pontos x, y, z em $\sum_3$ vale: $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$
   Demonstração:

Se provarmos que a desigualdade vale para todas as casas das seqüências provamos a desigualdade triangular para métrica d, isto é basta provar para d*.

$d^*(x_i, y_i) \leq d^*(x_i, z_i) + d^*(y_i, z_i)$

Vamos dividir em casos:

I. $x_i = A$ e $y_i = C$;

Ia) $z_i = A$:

A desigualdade fica $d^*(A, C) \leq d^*(A, A) + d^*(C, A)$ ou seja, 2 <= 0 + 2. Válido!

Ib) $z_i = B$

A desigualdade fica $d^*(A, C) \leq d^*(A, B) + d^*(C, B)$, ou seja, 2 <= 1 + 1. Válido!

Ic) $z_i = C$:

A desigualdade fica $d^*(A, C) \leq d^*(A, C) + d^*(C, C)$, ou seja, 2 <= 2 + 0. Válido!

II. $x_i = A$ e $y_i = B$;

IIa) $z_i = A$:

A desigualdade fica $d^*(A, B) \leq d^*(A, A) + d^*(B, A)$ ou seja, 1 <= 0 + 1. Válido!

IIb) $z_i = B$

A desigualdade fica d* (A, B) $\leq$ d*(A, B) + d* (B, B), ou seja, 1 <= 1 + 0. Válido!

IIc) z_i = C:
A desigualdade fica d* (A, B) $\leq$ d*(A, C) + d* (B, C), ou seja, 1 <= 2 + 1. Válido!

III. x_i = A e y_i = A;

IIIa) z_i = A:
A desigualdade fica d* (A, A) $\leq$ d*(A, A) + d* (A, A) ou seja, 0 <= 0 + 0. Válido!

IIIb) z_i = B
A desigualdade fica d* (A, A) $\leq$ d*(A, B) + d* (A, B), ou seja, 0 <= 1 + 1. Válido!

IIIc) z_i = C:
A desigualdade fica d* (A, A) $\leq$ d*(A, C) + d* (A, C), ou seja, 0 <= 2 + 2.
Válido!

Demonstrando assim a desigualdade triangular.

Conjunto de Cantor (ternário):

O conjunto de Cantor K é complementar de uma reunião de intervalos abertos em [0,1] de forma que é um subconjunto fechado do mesmo intervalo [0,1]. Sua construção é dada. Sua construção pode ser vista em qualquer livro de análise assim como algumas de suas propriedades:
a) K é compacto;
b) K tem interior vazio;
c) K não contém pontos isolados;
d) K é não-enumerável

No caso do *conjunto de Cantor ternário*, retira-se sucessivamente o intervalo terço central de cada subintervalo obtido na etapa anterior da construção.

Demonstração do item d:

Suponha por absurdo que o conjunto K é enumerável, K = $\{x_1, x_2, x_3, ..., x_n. ...\}$.

Para o "primeiro" elemento x_1 da enumeração de K, centrado em algum ponto de K tomamos um intervalo compacto não degenerado I_1 tal que x_1 não pertence a I_1. Sabemos que I_1 interseção K é um conjunto infinito, compacto, sem pontos isolados.

Agora escolha um intervalo I_2 centrado em outro ponto de K tal que I_2 esta contido no interior de I_1 tal que x_2 não pertence a I_2. I_2 interseção K possui as mesmas propriedades de I_1 interseção K. Ao escolhermos I_2 contido no interior de I_1 garantimos que I_2 não contém os extremos de I_1 e que não contém pontos isolados

Continuando o processo teremos uma seqüência decrescente de intervalos compactos I_1 contem I_2 contem I_3 ...contem I_n ... tais que x_n não pertence a I_n e I_n interseção K é não vazio. Pelo Teorema dos Intervalos Encaixados haverá um único ponto c pertencente a todos os I_n. Mas por construção essa interseção não poderia conter nenhum elemento da enumeração de K, absurdo.

Observação: As propriedades a, b, c são usadas para definir um conjunto de Cantor qualquer. A demonstração de d por se valer apenas de a e c é valida para um Cantor qualquer.

<u>Proposição</u>: Existe um ponto p de S_1 cuja órbita por T_3 é densa em K, conjunto de Cantor ternário.

Demonstração:

Dado que T_3 é conjugado topologicamente ao σ, basta analisarmos e demonstrarmos para σ pela dinâmica simbólica.

Considere um ponto p formado pela justaposição dos diversos "blocos" de A e C, isto , nas duas primeiras posições é formado pelos blocos de tamanho um de A e C.

$p_1 = \{A,C\}$

Da posição 3 a posição 6 acrescente todos os blocos de comprimento de 2 na ordem que você desejar, por exemplo:

$p_{1+2} = \{A,C,A,A,A,C,C,A,C,C\}$

Continuando sucessivamente o processo, tem-se uma seqüência de $p_\infty = p$ em $\sum_3$ que contém todos os possíveis blocos com comprimento finito.

Vamos verificar que a órbita de p por σ é densa em K.

Seja q um elemento de $\sum_3$ formado apenas por A e C ("q é um ponto de K"), e $\varepsilon > 0$, queremos mostrar que existe algum iterado N de σ, tal que $d(q, \sigma N(p)) \leq \varepsilon$. Fixe M pertencente IN tal que$1/(2^{M+1}) < \varepsilon$.

Como todos os possíveis blocos de comprimento M aparecem como sub-blocos de p, segue que o M-bloco é formado pela M primeiras posições de q aparece a partir de alguma posição M de p, ou seja:

$q_i = p_{i+N}$ para todo i pertencente $\{0,1,...,M-1\}$

Pela definição de σ temos q as primeiras M posições de $\sigma^N(p)$ coincidem com as primeiras M posições de q tal que:

$q_i = (\sigma^N(p))_i$ para todo i pertencente $\{0,1,...,M-1\}$.

Segue então que:

$$d(q, \sigma N(p)) \equiv \sum_{n\in IN^*}(d^*(q_i, \sigma^N(p)_i))/3^n$$

$$= \sum_{i=0}^{M-1}(d^*(q_i, \sigma^N(p)_i))/3^n + \sum_{i>=M} (d^*(q_i, \sigma^N(p)_i))/3^n$$

$$= \sum_{i>=M} (d^*(q_i, \sigma^N(p)_i))/3^n \leq \sum_{i>=M}1/3^i$$

$$= 1/3^{M+1}. < \varepsilon$$

Como queríamos demonstrar.

Obtenção de uma aproximação para p

Algoritmo:

Definimos uma matriz infinita no qual a linha n possui blocos de letras com tamanho n e depois sucessivos 0s. Nota-se que cada linha possui 2^n termos não nulos.
em cada linha os blocos estão ordenados de maneira crescente:

1- A, B, 0 0 0 0 0 0 ......

2- AA, AC, CA, CC 0 0 0 0 .....

3- AAA, AAC, ACA, ACC, CAA, CAC, CCA, CCC .....
.
.
.
Obs: ordem crescente significa que C é maior do que A.

Percorrendo essa matriz, começando na primeira linha da esquerda para direita e mudando para a linha de baixo quando já se contabilizou todos os termos não nulos, definimos nosso ponto p, o qual será nossa aproximação.

Demonstração:

Vamos mostrar que p chega bem perto de q (ponto qualquer pertencente a K) após um certo número de iterações de T_3.

Queremos que após certo número de iterações a imagem de p tenha as M primeiras casas iguais as de q.

Sabemos que existe um bloco na linha M que satisfaz essa condição pela própria construção da matriz.

Para acharmos a coluna que o bloco esta faz-se o seguinte:

1. Tome um truncamento w de q com M casas;
2. Passe w para base 2 onde A=0 e C=1;
3. Passe w, assim, para base 10.

Seja j o número da coluna. Pela própria construção j = w+1.

Uma vez tendo j é fácil descobrir quantas vezes (r) teremos que aplicar T_3 para chegar a esse bloco:

$$r = \sum_{i=1}^{i=(M-1)} (i \times 2^i)] + M(j-1)$$

Assim chegamos ao bloco desejado, que está tão próximo de q quanto desejarmos e com r iterações de T_3.

Bibliografia:

F. Abdenur e L. F. N. França, *Hiperbolicidade, Estabilidade, e Caos em Dimensão Um*. 26to Colóquio Brasileiro de Matemática, 2007.