ALGUMAS PROPRIEDADES DAS CURVAS CONVEXAS DO PLANO

Aluno: Paula Mauricio Nunes
Orientador: Henri Nicolas Anciaux

Introdução

Nos dias atuais, a matemática faz-se presente em todos os lugares. Ao colocar uma moeda para telefonar ou conseguir balas ninguém para pra pensar em todo o processo que decorre desde a entrada da moeda até a saída do objeto desejado. Além do peso, muitos aparelhos utilizam a forma para diferenciação das moedas como um meio de evitar fraudes. Por isso é de suma importância a análise da forma e da curvatura das curvas planas. Assim sendo o nosso estudo além de ter interesse matemático também possui aplicações práticas.

Objetivo

Esse trabalho objetiva analisar a curvatura das curvas e suas propriedades dando ênfase às curvas de largura constante, demonstrando que, além do círculo, existem inúmeras outras curvas de largura constante que possuem propriedades muito interessantes.

Todo o estudo abrange apenas curvas convexas e, por essa razão, as propriedades demonstradas só são válidas para este tipo de curva.

Metodologia

Para construção de uma base de referências foram lidos e demonstrados alguns teoremas relacionados à teoria das curvas. Procurou-se ao máximo entender os conceitos fundamentais que tratam da curvatura.

Antes de tudo foi preciso conhecer algumas definições básicas como o que é: curva regular, curva convexa, comprimento de arco, largura e diâmetro. Depois foi feito um estudo de algumas proposições clássicas como o teorema de Euler (a derivada de uma função anula-se em um ponto extremo interior), o teorema de Jordan (uma curva plana, simples e fechada define uma região) e a desigualdade isoperimétrica (a área compreendida por uma curva é sempre maior que zero e menor ou igual a $L^2/4p$, onde L denota o comprimento da curva).

Com esses conceitos fixados, foi feita uma revisão da análise de Fourier básica como:

- Decomposição de uma função h(t) 2p-periódica na base de Fourier:
  $$h(t) = S(c_n e^{int})$$
- Relação entre $S(c_n e^{int})$ e $S(a_n \operatorname{sen}(nt) + b_n \cos(nt))$

E uma parametrização especial de curvas estritamente convexas foi considerada.

Também foi encontrada uma nova demonstração da desigualdade isoperimétrica (no caso das curvas convexas).

Por fim foram analisadas as curvas de largura constante e provados os resultados abaixo:

- <u>Teorema 1</u>: Em qualquer curva fechada o diâmetro e a largura máxima são iguais.

- *Corolário:* A largura na direção u é igual a h(u) + h(-u), onde h é a função suporte da curva (vide abaixo a definição). Além disso, se a largura é constante, ela é igual ao diâmetro.

- Teorema 2: Uma curva de largura constante L = a tem perímetro L(d) igual a ap.
- Teorema 3: Desigualdade isoperimétrica no caso de uma curva convexa: $4pA \leq L^2$.
- Teorema 4: Se a(t) é uma curva de largura constante, as suas curvas paralelas também tem largura constante.

Algumas definições e fatos clássicos

Antes de qualquer demonstração é preciso saber algumas definições tais como as expressas abaixo:

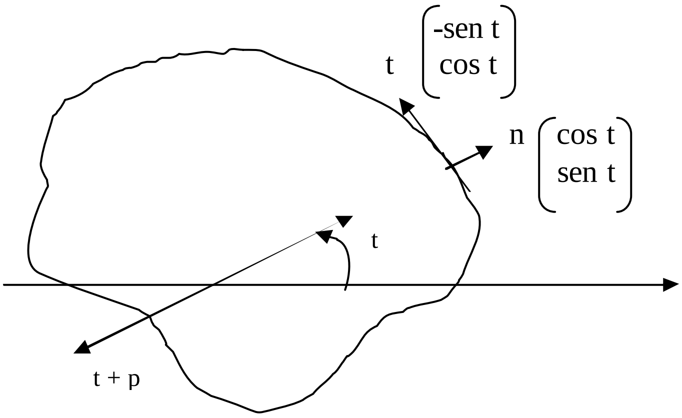
Seja a:[a, b] ? R^2 a parametrização de alguma curva simples do plano então:

- Uma *curva* é dita *regular* se para qualquer ponto a(s), a'(s) ? 0.
- O comprimento L da curva é dado por:

$$\mathrm{L}(a) = \int_a^b |a'(s)| ds$$

- O *diâmetro* D é dado por D(s,t)= máx{|a(s) - a(t)|}, s,t ∈ [a, b].
- A *largura* (L) na direção u é dada por L(u) = h(u) + h(-u) onde h(u) = $\text{máx}_{a=s=b}$ ⟨a (s), u⟩, u ∈ $\mathbb{S}^1$, isto é, ⟨a'(s), u⟩ = 0. Logo h(u) é o máximo entre as distâncias (orientadas) da origem as tangentes a a. A função h é chamada *função suporte*.
- Se s é o *parâmetro de arco*, isto é |a'(s)|=1, para todo s, A *curvatura* k(s) da curva em s é dada por k(t) = a''(s).
- Uma curva simples é dita *convexa* se a sua curvatura não muda de sinal.
- Teorema de Euler: A derivada de uma função anula-se em um ponto extremo.
- Teorema de Jordan: Uma curva plana simples define uma região interior.
- Desigualdade isoperimétrica: A área A da região interior de uma curva plana simples de comprimento L satisfaz a desigualdade $4pA \leq L^2$. Além disso, se $4pA=L^2$, a curva é um círculo.

Ferramenta principal: parametrização de uma curva convexa por sua direção normal:



Seja uma curva convexa parametrizada por d(t) = a(t) n (t) + b(t) t (t), onde a(t) e b(t) são duas funções reais.

Logo, sendo n a normal igual a $\begin{pmatrix} \cos t \\ \operatorname{sen} t \end{pmatrix}$ e t a tangente igual a $\begin{pmatrix} -\operatorname{sen} t \\ \cos t \end{pmatrix}$

$$d(t) = a(t) \begin{pmatrix} \cos t \\ \operatorname{sen} t \end{pmatrix} + b(t) \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

Como assumimos que a curva é convexa, podemos assumir que a uma direção n(t) corresponde um único ponto da curva. Vamos determinar a(t) e b(t) de modo que n(t) seja o vetor normal unitário à curva d(t).

Sendo n' = t e t' = -n, derivando-se d(t), obtém-se:

d'(t) = a'(t) n + a(t) n'+ b'(t) t + b(t) t'

d'(t) = (a' – b) n + (a + b') t'

n normal implica que:

< d', n > = a' – b portanto, d(t) =a(t) n (t) + a'(t) t (t)

Além disso, h(t) = < d(t) , n > = a(t), ou seja a(t) é a função suporte h(t).

Observamos também que d'(t) = (h(t) +h''(t)) t', em particular h(t) +h''(t) não pode anular-se. Portanto assumiremos que h(t) + h''(t) > 0.

Como -n(t) = n(t+p), conclui-se que a largura de d(t) na direção n(t) é igual a h(t) +h(t+ p) (usando o corolário do Teorema 1).

<u>Resumindo</u>: podemos parametrizar uma curva convexa da seguinte maneira: d(t) = h(t)n(t) + h'(t)t(t), onde h(t) é qualquer função 2p periódica tal que h+ h'' > 0. Além disso, h(t) é a função suporte da curva e a sua largura (na direção n(t)) é h(t) + h(t+p).

Demonstração dos Teoremas

A. Demonstração do Teorema 1 (Em qualquer curva fechada o diâmetro e a largura máxima são iguais):

Seja D(s, t) o diâmetro, essa função atinge seu máximo em (s_0, t_0) tal que:

$$\left.\frac{\partial D}{\partial s}\right|_{(s_0,t_0)} = \left.\frac{\partial D}{\partial t}\right|_{(s_0,t_0)} = 0 \Rightarrow \langle t(s_0), a(s_0) - a(t_0)\rangle = \langle t(t_0), a(s_0) - a(t_0)\rangle = 0$$

Afirma-se isso pela aplicação do teorema de Euler que diz que todos os pontos de máximo têm derivadas iguais à zero.

Por definição todos os pontos da curva estão contidos entre $a(s_0)$ e $a(t_0)$ e esse diâmetro é igual à largura 2w na direção de $a(s_0)$ como demonstramos. Logo $D \leq w_{máx}$.

Agora peguemos $u \in S^1$ e $s_0, t_0 \in [a, b]$. Então:

$2w(u) = h(u) + h(-u) = \langle a(s_0), u \rangle + \langle a(t_0), -u \rangle = \langle a(s_0) - a(t_0), u \rangle \leq |a(s_0) - a(t_0)|$

Do que concluímos que D = 2w(u) para qualquer u.

Logo concluímos que D = 2w(u) como queríamos demonstrar.

<u>Conclusão:</u>

Curvas convexas de largura constante têm seu diâmetro realizado por todos os pontos (p) da curva e seus respectivos pares (p') que estão situados na normal a a(p) a uma distância D = 2w que é constante.

<u>Corolário:</u>

A largura na direção u é igual a h(u) + h(-u). Além disso, se ela é constante, ela é igual ao diâmetro.

B. Demonstração do Teorema 2 (Uma curva de largura constante 2w tem perímetro L(d) igual a 2wp):

Suponhamos uma curva de largura constante L = h(t) + h(t + p) = 2w, então L(d) = 2pw.

Se d tem largura constante 2w então, usando a parametrização especial:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{L}(d) &= \int_0^{2p} |d'(t)|dt = \int_0^{2p} |h(t) + h''(t)|dt = \int_0^{2p} (h(t) + h''(t))dt \\
&= \int_0^{2p} h(t)dt + \int_0^{2p} h''(t)dt = \int_0^{2p} (h(t) + h'(2p) - h'(0))dt \\
&= \int_0^{p} h(t)dt + \int_p^{2p} h(t)dt = \int_0^{p} h(t)dt + \int_0^{p} h(t'+p)dt' \\
&= \int_0^{p} (h(t) + h(t+p))dt = \int_0^{p} 2w\,dt = 2pw
\end{aligned}
$$

<u>Corolário:</u> o comprimento de curvas convexas é sempre 2pw, independente de a largura ser constante ou não.

C. Demonstração da desigualdade isoperimétrica (caso das curvas convexas):

Calculemos agora a área do interior da curva utilizando a parametrização por h(t) e o teorema de Green.

$$\iint_\Omega dxdy = \iint_\Omega Rot(F)dxdy = \oint_g \langle F, \bar{t} \rangle\, dl, \text{onde } \mathrm{F} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}, \text{logo } \mathrm{Rot(F)} = 1$$

$$A = \int_0^{2p} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -h(t)sent - h'(t)\cos t \\ h(t)\cos t - h'sent \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -sent \\ \cos t \end{pmatrix} \left\| \frac{dg}{dt} \right\| dt =$$

$$\int_0^{2p} \frac{1}{2} \left(h(t)sen^2 t + h'(t)\cos t sent + h(t)\cos^2 t - h'(t)\cos t sent \right) \left(h(t) + h''(t) \right) dt =$$

$$\int_0^{2p} \frac{h(t)}{2} \left(h(t) + h''(t) \right) dt = \frac{1}{2} \left(\int_0^{2p} h^2(t)dt + \int_0^{2p} h(t)h''(t)dt \right) =$$

$$\int_0^{2p} h^2(t)dt + h(t)h'(t)\Big|_0^{2p} - \int_0^{2p} \left(h'(t) \right)^2 dt = \int_0^{2p} h^2(t)dt - \int_0^{2p} \left(h'(t) \right)^2 dt$$

Para comparar esta expressão com o comprimento, vamos introduzir a série de Fourier de h:

Seja $h(t) = w + a_1\cos(t) + b_1 sen(t) + a_2\cos(2t) + b_2 sen(2t) + a_3\cos(3t) + b_3 sen(3t)$ e $|a'(t)| = h(t) + h''(t)$. Logo:

$h'(t) = - a_1 sen(t) + b_1\cos(t) - 2a_2 sen(2t) + 2b_2\cos(2t) - 3a_3 sen(3t) + 3b_3\cos(3t)$
$h''(t) = - a_1\cos(t) - b_1 sen(t) - 4a_2\cos(2t) - 4b_2 sen(2t) - 9a_3\cos(3t) - 9b_3 sen(3t)$
$|a'(t)| = w - 3a_2\cos(2t) - 3b_2 sen(2t) - 8a_3\cos(3t) - 8b_3 sen(3t)$

$$\sum a_n \cos(nt) + b_n sen(nt) = \sum a_n \left(\frac{e^{nti} + e^{-nti}}{2} \right) + b_n \left(\frac{e^{nti} - e^{-nti}}{2} \right) =$$

$$w + \sum e^{nti} \left(\frac{a_n + b_n}{2} \right) + e^{-nti} \left(\frac{a_n - b_n}{2} \right), n \in \mathrm{N}$$

$$h(t) = \sum c_n e^{nti}, n \in \mathrm{Z} \begin{cases} \mathrm{c_n} = \left(\dfrac{a_n - b_n i}{2} \right), n \geq 0 \\ \mathrm{c_n} = \left(\dfrac{a_n + b_n i}{2} \right), n < 0 \end{cases}$$

$$A = \int_0^{2p} h^2(t)dt - \int_0^{2p} \left(h'(t) \right)^2 dt = \int_0^{2p} h^2(t)dt - \int_0^{2p} \left(h'(t) \right)^2 dt = \int_0^{2p} (\sum c_n e^{nti})^2 - (\sum nic_n e^{nti})^2$$

$$A = p \sum \|c_n\|^2 - p \sum n^2 \|c_n\|^2 = p \sum (1 - n^2) \|c_n\|^2$$

Podemos fazer essa substituição, pois a família e^{int} é ortonormal com respeito ao produto escalar <,> = . Logo $A= p\, \Sigma(1-n^2) \|c_n\|^2$

$$\sum \|c_n\|^2 = w^2 + \frac{\sum a_n^2 + b_n^2}{2} \begin{cases} c_0^2 = w^2 \\ c_n^2 = \left(\dfrac{a_n - b_n i}{2} \right)^2 = \dfrac{1}{4} \left(a_n^2 - 2a_n b_n i - b_n \right), n > 0 \\ c_n^2 = \left(\dfrac{a_n + b_n i}{2} \right)^2 = \dfrac{1}{4} \left(a_n^2 + 2a_n b_n i - b_n \right), n < 0 \end{cases}$$

Finalmente, temos $A = p\, w^2 + p\, \Sigma\, (1-n^2)(a_n^2 + b_n^2)$.

Como o segundo termo é negativo (já que $1-n^2$ é negativo), temos $A = p\ w^2$, portanto: $4pA = 4p\ w^2$.

Por outro lado, vimos no Corolário do Teorema 2 que $L=2p\ w$ e logo $L^2 = 4p\ w^2$. Concluímos então que:

$4pA = L^2$, que é a desigualdade desejada.

D. Demonstração do Teorema 4 (se a(t) é uma curva de largura constante, as suas curvas paralelas também têm largura constante):

Se d(t) é a parametrização de uma curva e n(t) o seu vetor normal unitário, então a curvas paralelas são parametrizadas por $d_e(t) = d(t) + en(t)$. Usando a parametrização especial:

$d(t) = h(t)n(t) + h'(t)t(t)$, logo:

$d_e(t) = (h(t)+e)\ n(t) + h'(t)\ t(t)$, ou seja, a função suporte da curva paralela é:

$h_e(t) = h(t) + e$

Decorre que se a curva d tem largura constante w, isto é $h(t)+h(t+p)= 2w$, teremos:

$h_e(t) + h_e(t+p) = h(t) + e + h(t+p) + e = 2w + 2e$, assim, a curva paralela d_e tem largura constante igual a $2w + 2e$.

Resultados obtidos

Essa pesquisa além de demonstrar teoremas já conhecidos e unir conceitos distintos, facilitando o estudo dessas curvas, consegue propor uma nova demonstração para a desigualdade isoperimétrica no caso de curvas convexas.

Conclusão

Com essa pesquisa ficará mais fácil de adquirir todo o conhecimento básico necessário para se fazer uma análise mais profunda da curvatura das curvas e suas propriedades. Ela pode ser o começo de muitas pesquisas nessa área.