

DINÂMICA DA TRANSFORMAÇÃO DE GAUSS

Aluno: Juliana Arcoverde
Orientador: Lorenzo Díaz

Introdução

Este projeto de iniciação científica está dedicado ao estudo da Dinâmica Aritmética, que estuda sistemas dinâmicos que descrevem representações (expansões) de números reais. Exemplos destas expansões são as expansões n -árias, as expansões “beta” e as expansões em frações contínuas (nosso principal tema de estudo). Cada uma destas expansões tem associado um sistema dinâmico (iteração de uma função) de tipo (essencialmente) expansivo. Do estudo das propriedades dinâmicas destas transformações é possível deduzir propriedades sobre as expansões de números reais correspondentes. Estudamos propriedades topológicas (existência e densidade de pontos periódicos, transitividade) e probabilísticas/estatísticas (“ergodicidade”) destas transformações. Estamos interessados em transladar estas propriedades para as expansões e entender as expansões de números típicos (com probabilidade um).

Até o momento, a abordagem para esta compreensão foi baseada no livro “Uma introdução aos sistemas dinâmicos via frações contínuas” [1] que, como sugere o título, propõe o entendimento do tema através de frações contínuas. No caso da expansão em frações contínuas, o sistema dinâmico associado é a denominada Transformação de Gauss. A grande vantagem desta transformação é que permite introduzir problemas interessantes de Sistemas Dinâmicos com uma abordagem relativamente simples e permite abordar alguns problemas clássicos de teoria de números (como por exemplo, boas aproximações de números reais por números racionais).

Objetivos

Estudamos as características e os principais aspectos da Transformação de Gauss. Enfatizamos as diferentes propriedades topológicas e ergódicas da sua dinâmica. Estas propriedades são utilizadas para obter propriedades sobre a expansão em frações contínuas de números reais “típicos”.

Metodologia e resultados

Como mencionado o estudo foi baseado no livro “Uma introdução aos sistemas dinâmicos via frações contínuas” [1]. Tivemos encontros de trabalho semanais.

Em uma fase inicial, como a aluna ainda não tinha os pré-requisitos matemáticos básicos, no momento em que iniciou o projeto, foram necessários alguns estudos prévios de análise matemática.

Em uma segunda etapa, analisaram-se boas aproximações por convergentes, destacando como a seqüência de números racionais dos convergentes de um número x se aproxima dele. Nesta etapa foi importante ressaltar novamente as diferenças quando x é um número racional ou irracional.

Continuou-se o estudo analisando números algébricos e suas singularidades. O Teorema de Liouville e suas inferências foram bastante importantes. A medida de Lebesgue

também foi estudada e utilizada. Abordaram-se também algumas noções de análise, como conjuntos densos e residuais, importantes para o próximo passo da pesquisa: a dinâmica da Transformação de Gauss.

Foram estudadas as propriedades topológicas e ergódicas da Transformação de Gauss, o que possibilitou a compreensão de uma série de proposições como, por exemplo, a que afirma que essa transformação é topologicamente misturadora. Foram estudadas também outras expansões, como as *n-árias* e as β .

Por fim, foi feita uma análise mais detalhada da dinâmica da transformação de Gauss, destacando seu itinerário.

Referências

1 – DÍAZ, Lorenzo J. ; JORGE, Danielle de Rezende. **Uma introdução aos Sistemas Dinâmicos via Frações Contínuas**. 26º Colóquio Brasileiro de Matemática. IMPA, 2007. 211 p.