O TEOREMA DE EQUILÍBRIO DE NASH

Aluno: Pedro Henrique de Castro Simões
Orientador: Flávio Abdenur

Introdução

Estudamos ao longo do segundo semestre de 2006 tópicos em análise real na reta. Com as ferramentas adquiridas nos dedicamos desde janeiro de 2007 ao estudo dos conceitos matemáticos por trás do equilíbrio de Nash. Com o exemplo simples (mas altamente esclarecedor e de fácil extensão para n jogadores) de dois jogadores, mostramos as condições que devem ser atendidas por domínios, estratégias, e pelas funções de utilidade para que exista um equilíbrio de Nash. Finalmente, utilizando o teorema do ponto fixo de Brouwer, provamos a existência de tal equilíbrio.

Desenvolvimento

Antes de tudo, cabe uma definição. Um *equilíbrio de Nash* é uma situação na qual, dadas as decisões tomadas pelos outros competidores, nenhum jogador pode melhorar sua situação mudando sua própria decisão. O "dilema dos prisioneiros" oferece uma boa ilustração deste conceito:

Prisioneiro B

	Confessar	Negar
Confessar	(-5, -5)	(0, -10)
Negar	(-10, 0)	(-1, -1)

Prisioneiro A

Vemos na matriz de payoffs acima que, na ausência de um acordo prévio entre os prisioneiros, tenha o outro confessado ou negado, é sempre melhor confessar. Assim, o ponto (Confessar, Confessar) representa um exemplo de equilíbrio de Nash.

O dilema dos prisioneiros é um jogo com estratégias discretas (Confessar ou Negar). Mais interessante e útil para nosso trabalho é ter estratégias contínuas que podem representar preços, decisões de produção ou qualquer outra situação em que os resultados individuais dependam das decisões de outros agentes.

Suponha um jogo com dois participantes ("1" e "2") que escolhem estratégias no intervalo [0,1]. Temos assim: $I_1 = [0,1]$ e $I_2 = [0,1]$, e o domínio $I_1 \times I_2$ será o quadrado compacto de lado 1. O bem-estar, ou "utilidade", de cada jogador é dado pelas funções U_1: $I_1 \times I_2$? I_1 e U_2: : $I_1 \times I_2$? I_2. (Ou seja, o bem-estar de cada jogador não depende somente da escolha que ele próprio faz, mas também da escolha feita pelo outro jogador.) A partir destas funções-utilidade, definimos agora F_1: I_2 ? I_1 e F_2: I_1 ? I_2 como sendo funções tais que, dada a decisão de um dos jogadores, F_i leva o outro a tomar uma decisão que maximize sua utilidade. Por exemplo: F_1 leva x^*_2 no único $\bar{x}_1$ que maximize a utilidade do jogador 1, ou seja: $U_1(\bar{x}_1, x^*_2) = U_1(x_1, x^*_2)$ $\forall$ $x_1 \in I_1$ e $U_2(x^*_1, \bar{x}_2) = U_2(x^*_1, x_2)$ $\forall$ $x_2 \in I_2$.

Se considerarmos o produto $F_1 \times F_2$ obteremos uma aplicação $F: I_1 \times I_2 \rightarrow I_1 \times I_2$, que leva o par (x^*_1, x^*_2) no par $(F_1(x^*_2), F_2(x^*_1))$; os pontos fixos desta aplicação serão equilíbrios de Nash no jogo. Logo a demonstração da existência de um equilíbrio de Nash se resume a obter um ponto fixo da aplicação $F_1 \times F_2$.

Algumas condições devem ser atendidas para que as F_i sejam realmente funções bem-definidas. Para garantir a boa-definição de F_i, as funções-utilidade U_1 e U_2 devem ser contínuas, pois segue então pelo teorema de Weierstrass que existem pontos que maximizam $U_1(\cdot, x^*_2)$ e $U_2(x^*_1, \cdot)$, já que I_1 e I_2 são compactos. No entanto, por si só a continuidade das funções-utilidade não é o bastante para afirmar que cada F_i é função bem-definida, pois podem existir vários pontos que maximizem F_i nos dados intervalos. Queremos, portanto, uma condição que garanta a unicidade do ponto maximizante de utilidade. Esta condição é a *concavidade* das funções-utilidade.

Para garantir a concavidade bastará para nossos objetivos supor que a segunda derivada de U_i seja negativa no intervalo [0,1], uma vez fixada a escolha do outro jogador. Utilizaremos o teorema do valor médio para provar que $f''(x) < 0$ implica em concavidade. Suponha $f: R \to R$ tal que $f''(x) < 0 \ \forall \ x \in [a,b]$. Sabemos que f é côncava se $f(x) \leq f(a) + f'(a)(x - a)$, ou seja, f está localizada abaixo da reta que tangencia f no ponto a. O teorema do valor médio garante que $\exists$ z $\in$ (a,b) tal que $f'(z) = f(b) - f(a) / b - a$. Considere $f/_{(a,x]}$. Pelo teorema do valor médio $\exists$ z $\in$ (a,x) tal que $f'(z) = f(x) - f(a) / x - a$. Remanejando a equação obtemos $f(x) = f(a) + f'(z)(x - a)$. Como, por hipótese, $f'' < 0$ e $z > a$, podemos afirmar que $f'(z) < f'(a)$. Temos assim $f(x) = f(a) + f'(z)(x - a) < f(a) + f'(a)(x - a)$, f portanto é côncava.

Uma vez que a existência (e continuidade) de F_1 e F_2 esteja garantida, precisamos de um argumento para garantir a existência de um ponto fixo de $F_1 \times F_2$, ou seja, de um equilíbrio de Nash. Utilizamos para tanto o seguinte teorema:

Teorema do Ponto Fixo de Brouwer: Seja B conjunto compacto e convexo. Se $f: B \to B$ é uma aplicação contínua então existe $x \in B$ tal que $f(x) = x$.

Como no nosso contexto o domínio $I_1 \times I_2$ é compacto e convexo, e a aplicação $F: I_1 \times I_2 \to I_1 \times I_2$ é contínua (pois é o produto de duas funções contínuas F_1 e F_2) podemos, pelo teorema do ponto fixo de Brouwer, afirmar que existe um ponto $\vec{x} \in I_1 \times I_2$ tal que $F(\vec{x}) = \vec{x}$, ou seja, que existe um equilíbrio de Nash.

Parte final da demonstração do Teorema de Brouwer. Provaremos o teorema no caso em que B é uma bola fechada, e tomando como fato a seguinte (e difícil) proposição: se B é compacto então não existe nenhuma aplicação contínua $f: B \to \partial B$ tal que $f|_{\partial B} = id|_{\partial B}$. Supomos por contradição que existe aplicação contínua $f: B \to B$ tal que não possui nenhum ponto fixo, ou seja, f(x) ? x para todo $x \in B$. Definimos então $g: B \to \partial B$ da seguinte maneira: g(x) = interseção com ∂B do segmento de reta que começa em f(x) e passa por x. Intuitivamente vemos que g é contínua, e se $x \in \partial B$, vale que $g(x) = x$. Então g é contínua e $g|_{\partial B} = id|_{\partial B}$, o que contradiz o fato citado cima.

Referências

[1] J. P. Torres, "Jogos Sociais e Equilíbrio Walrasiano", notas de minicurso SEMAP/UFF online (http://www.semap.labma.ufrj.br/arquivos), 2006.

[2] H. J. Bortolossi, G. Garbugio, e B. A. Sartini, "Uma Introdução à Teoria dos Jogos", notas de minicurso SEMAP/UFF online (http://www.semap.labma.ufrj.br/arquivos), 2006.

[3] E. L. Lima, "Análise Real, Volume 1", Coleção Matemática Universitária/IMPA, 2004.