OS IRRACIONAIS TÊM MEDIDA TOTAL

Aluno: Pedro Chaves Meurer Moreira
Orientadores: Flavio Abdenur/Marcos Craizer

Introdução

Os números reais se dividem em números *racionais* e números *irracionais*. Um número é dito racional se ele pode ser expresso como a razão entre dois números inteiros; um número é irracional se isto não ocorre. A experiência cotidiana sugere que os racionais são muito mais abundantes do que os irracionais. De fato, não é trivial mostrar sequer a existência dos números irracionais. Mas a teoria da cardinalidade, desenvolvida por Georg Cantor no final do século XIX, juntamente com a axiomatização da probabilidade, proposta por A. Kolmogorov na primeira metade do século XX, mostra que os números irracionais são muito mais abundantes do que os racionais. Tão mais abundantes que, se você escolher um número real de maneira verdadeiramente aleatória, então a probabilidade de se obter um número irracional é de 100%.

Objetivos

Demonstrar a enumerabilidade do conjunto dos números racionais, a não-enumerabilidade do conjunto dos números irracionais, e daí deduzir que os racionais são insignificantes do ponto de vista probabilístico.

Metodologia

No final do século XIX o matemático Georg Cantor estudou a questão de se definir o "tamanho" de um conjunto, em termos do número de elementos que ele contém. Um conjunto *finito* F é simplesmente um conjunto que se pode contar até ele acabar: “este aqui é o primeiro elemento de X, este é o segundo, etc, ..., e este aqui é o n-ésimo elemento de F, e... acabou.” Pronto: F é finito, e tem n elementos. Cantor disse que a *cardinalidade* de X é n. Sem grandes mistérios aqui.

Mas no caso de conjuntos infinitos, a cardinalidade é um conceito muito mais sutil. Cantor percebeu que se pode comparar a cardinalidade de dois conjuntos X e Y através da existência (ou não) de aplicações bijetivas entre X e Y.

Um conjunto infinito pode ter a mesma cardinalidade de um subconjunto próprio dele mesmo. Por exemplo, o conjunto dos números inteiros tem a mesma cardinalidade do conjunto de números inteiros pares. De fato, essa patologia -- ter a mesma cardinalidade de um subconjunto próprio -- *caracteriza* os conjuntos infinitos.

E a coisa não pára por aí. Cantor percebeu que existem conjuntos infinitos que são mais infinitos do que outros.

Os conjuntos que têm a mesma cardinalidade que o conjunto dos números inteiros são chamados de conjuntos *enumeráveis*. Por exemplo, o conjunto dos números inteiros é enumerável, assim como é o conjunto dos números naturais, e assim como também é -- o que é crucial para nós -- o conjunto dos números racionais. Os conjuntos enumeráveis são aqueles cujos elementos podem ser contados, *desde que nunca paremos a contagem*: "este aqui é o primeiro elemento de X, este é o segundo, etc , ..., este aqui é o n-ésimo elemento de F, ..." até infinito.

Mas existem conjuntos infinitos que possuem tantos elementos que -- ao contrário do que ocorre com os enumeráveis -- eles sequer podem ser "contados infinitamente". Estes conjuntos são os *não-enumeráveis*. O conjunto de todos os números reais é não-enumerável, assim como é o conjunto dos números irracionais. A demonstração da não-enumerabilidade dos reais é feita através e um argumento elegante e engenhoso chamado de *diagonal de Cantor*.

(Cantor morreu louco, tentando provar matematicamente a existência de Deus. Mas isso não vem ao caso.)

Na primeira metade do século XX o matemático russo A. Kolmogorov estabeleceu de maneira rigorosa a teoria da probabilidade. Ele fez isso valendo-se da teoria da medida e integração desenvolvida por Lebesgue no começo do século. O que interessa aqui é que Kolmogorov mostrou que conjuntos enumeráveis são irrelevantes do ponto de vista probabilístico. Em particular, como os racionais são enumeráveis, segue que a escolha aleatória de um número num intervalo nunca resultará num número racional -- ou seja, sempre resultará num número irracional.

Referências

[1] B. R. James, "Probabilidade: Um Curso em Nível Intermediário", Projeto Euclides, 1996.

[2] E. L. Lima, "Análise Real, Volume 1", Coleção Matemática Universitária/IMPA, 2004.