ESTIMATIVAS DE CURVATURAS EM CURVAS DISCRETAS - GEOMETRIA PROJETIVA

Aluno: Iuri Sobral
Orientador: Marcos Craizer

Introdução

A geometria projetiva surgiu com as dificuldades dos artistas do Renascimento de dar aos quadros que pintavam uma forma tal que as pessoas, ao olharem, identificassem o objeto real sem dificuldades. Isso levou os artistas a estudarem profundamente as leis que determinam a construção de projeções; e com esses estudos eles chegaram a teoria fundamental da perspectiva geométrica, que se expandiu, através de um pequeno grupo de matemáticos franceses motivados por Gerard Desargues.

Desargues publicou um tratado original sobre seções cônicas, aproveitando idéias de projeção, mas esse trabalho foi ignorado e esquecido pelos matemáticos da época e todas as publicações desapareceram, e o que os levou a tal falta de interesse sobre esse trabalho foi a geometria analítica que foi introduzida dois anos antes por René Descartes e uma terminologia excêntrica adotada por ele.

Mas o geômetra Michel Chasles conseguiu ressuscitar o trabalho de Desargues ao escrever sobre a história da geometria, após encontrar uma cópia manuscrita de seu estudo feita por um de seus seguidores. Assim, o trabalho de Desargues foi reconhecido como um dos clássicos no desenvolvimento da geometria projetiva. O ressurgimento da Geometria projetiva foi impulsionado por Poncelet, um prisioneiro de guerra russo, que sem livros nas mãos criou sua grande obra sobre a geometria projetiva publicada em 1822 com o título de "Tratado das propriedades projetivas das figuras". Esta obra deu início ao chamado "grande período da história da geometria projetiva", que abriu espaço aos grandes matemáticos. O trabalho de Desargues e Poncelet levou os geômetras a classificar a geometria em duas categorias: Propriedades métricas, que levam em conta as medidas das distâncias e dos ângulos e as Propriedades descritivas, que tratam das relações e posições dos elementos geométricos entre si.

Objetivos

Estudar uma metodologia de análise geométrica diferente das convencionais, buscando aplicar esse conhecimento em curvas parametrizadas em R^2 e R^3, calculando seus comprimentos e curvaturas projetivas. Ao se fazer isso, podemos efetuar transformações lineares em curvas, verificando suas curvaturas projetivas antes e depois das transformações, analisando-as e comparando-as mediante a Geometria Projetiva.

Utilizando-se do programa de computador Maple 9, podemos plotar tais curvas e observá-las graficamente para obter resultados visuais e coerentes com os cálculos.

Metodologia

Dada uma certa curva A(t), parametrizada em R^3, podemos calcular seu comprimento projetivo σ pelas seguintes relações:

$$H(t) = r - (1/3)pq + (2/27)p^3 - (1/2)q' + (1/3)pp' + (1/6)p'';$$

sendo:

p = - |A(t)’’’A(t)’A(t)| / |A(t)’’A (t)’A (t)|;
q = |A(t)’’’A(t)’’A(t)| / |A(t)’’A(t)’A(t)|;
r = |A(t)’’’A (t)’’A (t)’| / |A(t)’’A(t)’A(t)|;
$?\sigma/?t = H^{1/3}$;

A partir do H(t), podemos obter a curvatura projetiva K, grandeza de maior importância para todo o projeto de pesquisa:

$$K = H(t)^{-2/3}[-(1/2)p' - (1/6)p^2 + (1/2)q - (H(t)''/3\ H(t)) + (7\ H(t)'^2/18\ H(t)^2)];$$

No entanto, ao utilizar o programa Maple 9, simplificamos de forma significativa o trabalho, criando procedimentos que, dada uma certa curva, o programa calculava o comprimento e a curvatura projetiva. Para calcular o comprimento projetivo, o código de programação é:

```
CalculoSigma:= proc(A) with(LinearAlgebra): with(VectorCalculus):
A1:=TangentVector(A,t); A2:=TangentVector(A1,t); A3:=TangentVector(A2,t);
M1:=<<A3>|<A1>|<A>>; M2:=<<A3>|<A2>|<A>>; M3:=<<A3>|<A2>|<A1>>;
M4:=<<A2>|<A1>|<A>>; p:=-Determinant(M1)/Determinant(M4);
q:=Determinant(M2)/Determinant(M4); r:=Determinant(M3)/Determinant(M4);
H:=r - (1/3)*p*q + (2/27)*p^3 - (1/2)*diff(q,t) + (1/3)*p*diff(p,t) + (1/6)*diff(p,t$2);
sigma:= int(H^(1/3),t); end proc;
```

Para calcular a curvatura projetiva, o código de programação é:

```
CalculoK:= proc(A) with(LinearAlgebra): with(VectorCalculus):
A1:=TangentVector(A,t); A2:=TangentVector(A1,t); A3:=TangentVector(A2,t);
M1:=<<A3>|<A1>|<A>>; M2:=<<A3>|<A2>|<A>>; M3:=<<A3>|<A2>|<A1>>;
M4:=<<A2>|<A1>|<A>>; p:=-Determinant(M1)/Determinant(M4);
q:=Determinant(M2)/Determinant(M4); r:=Determinant(M3)/Determinant(M4);
H:=r - (1/3)*p*q + (2/27)*p^3 - (1/2)*diff(q,t) + (1/3)*p*diff(p,t) + (1/6)*diff(p,t$2);
K:=simplify(H^(-2/3)*( (-1/2)*diff(p,t) - (1/6)*p^2 + (1/2)*q - (1/3)*diff(H,t$2)/H +
(7/18)*(diff(H,t))^2/H^2 ),power, assume=positive); end proc;
```

Conclusões

A partir dos métodos e recursos utilizados, foi possível determinar comprimentos e principalmente curvaturas projetivas de curvas, geralmente espirais logarítmicas, observando-as em R^3. Também foi comprovado que, após uma transformação linear, uma curva tem a sua curvatura projetiva inalterada.

Referências

[1] Introdução à geometria projetiva (2004). BARROS, Abdênago Alves de; ANDRADE, Placido F. A.;

[2] Elementos de geometria projectiva. ALBUQUERQUE, Luís de.

[3] Projective geometry. COXETER, H. S. M..

Observação do orientador

O aluno teve que interromper o projeto de pesquisa por motivos pessoais e foi substituído por outro aluno, que iniciou um novo projeto.