

CURVATURAS, GEODÉSICAS E ISOMETRIAS ESTUDANDO EXEMPLOS NO PLANO E NO ESPAÇO

Alunos: Gustavo Schinazi e Arthur de Freitas
Orientador: Ricardo Sá Earp

Vamos apresentar certos aspectos da geometria das curvas e superfícies de \mathbb{R}^3 . O **círculo osculador** é o círculo que “melhor aproxima” uma curva a em um determinado ponto P . Ele tangencia a curva em P e possui a mesma **curvatura** (k_a) que ela nesse ponto, que é igual ao inverso do seu raio. Fisicamente, a curvatura representa a aceleração centrípeta de a em P , para a parametrizada pelo comprimento de arco. A **evoluta** é a curva contínua obtida unindo-se os centros dos círculos osculadores associados a cada ponto de a . A reta ortogonal a a em cada ponto é a reta tangente à evoluta no ponto referente, o que pode ser verificado derivando-se a expressão analítica da evoluta.

Estudamos alguns exemplos, com foco na família dos *hipociclóides*, obtidos geometricamente pela rotação de um círculo de raio 1 dentro de outro de raio $\frac{p}{q}$ ($p > q$). Percebemos que a evoluta de um *deltóide* ($\frac{p}{q} = 3$) parecia um outro *deltóide*, maior e girado. Idem para um *astróide* ($\frac{p}{q} = 4$). Em vista disto, decidimos verificar a proposição de que *a evoluta de um hipociclóide genérico é, de fato, um hipociclóide de mesmos parâmetros*. Analisando outros exemplos dessa família (Fig. 1) para encontrar quais transformações levam um *hipociclóide* em sua evoluta, vimos que uma rotação de $\frac{qp}{p}$ ($\mathbf{R}_{qp/p}$) seguida de uma homotetia de $\frac{p}{p-2q}$ ($\mathbf{H}_{p/p-2q}$) de um *hipociclóide* resulta numa curva com forma parecida com a da sua evoluta ($\mathbf{ev}_a(\mathbf{t})$). Fazendo ainda uma reparametrização linear de $\mathbf{t} + \frac{qp}{p}$ (note que o coeficiente linear é igual ao ângulo de rotação), iguala-se a curva obtida à evoluta. Com a ajuda do MAPLE, aplicamos essas três transformações a um *hipociclóide* genérico e obtivemos a mesma equação que a da evoluta, deduzindo a igualdade, dada pela fórmula: $\mathbf{ev}_a(\mathbf{t}) = \mathbf{H}_{p/p-2q} \circ \mathbf{R}_{qp/p} \circ \mathbf{a}(\mathbf{t} + \frac{qp}{p})$.

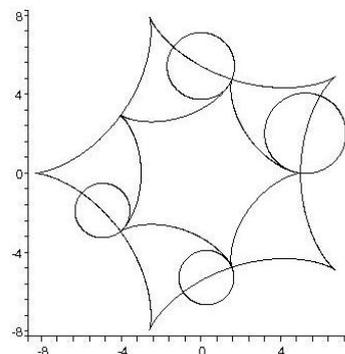


Fig. 1: Pentóide e sua evoluta

Com relação às curvas no espaço, o **plano osculador** é o plano que contém o vetor tangente e o vetor aceleração centrípeta da curva. A **torção** é a tendência da curva de “sair” do plano osculador (curvas planas têm torção nula). Utilizamos este conceito para entender o **Teorema Fundamental das Curvas no Espaço**, que diz que a curvatura k e a torção t determinam completamente uma curva, a menos de um movimento rígido de \mathbb{R}^3 . De fato, dadas as funções $k(t)$ e $t(t)$, e assumida a existência de três vetores ($T(t)$, $N(t)$ e $B(t)$) que satisfaçam as *Equações de Frenet* e que sejam ortonormais em um determinado ponto P , o Teorema da Existência e Unicidade das E.D.O.’s garante que T , N e B existem, formam sempre uma base ortonormal e são únicos, constituindo, assim, o chamado *Triedro de Frenet* (sistema de referência móvel) de exatamente uma curva (a menos de um movimento rígido), que possui curvatura k e torção t .

Exemplos: A *hélice*, curva invariante por “screw motions” (composições de rotações e translações) é, portanto, a única curva que possui curvatura e torção constantes. Notamos que a *curva de Viviani*, que é a interseção de uma esfera de raio $2a$ e um cilindro vertical deslocado de raio a , possui um ponto de auto-interseção P onde sua curvatura é igual à **curvatura média** de ambas as superfícies, $H = \frac{1}{2a}$.

Numa superfície dotada de uma **métrica** (Primeira Forma Fundamental), chamada **superfície Riemanniana**, temos as noções de comprimento de curvas, ângulo entre duas

curvas e área de regiões. Por exemplo, as curvas que fazem ângulos constantes com os meridianos (e paralelos) da esfera são chamadas de *loxodrômicas*, cuja projeção estereográfica, que é uma **aplicação conforme** (preserva ângulos), são as espirais logarítmicas do plano. Isto pode ser provado analisando uma EDO. As **geodésicas** em uma superfície Riemanniana são as curvas que minimizam (localmente) o comprimento de arco. Por exemplo, as únicas geodésicas de um cilindro são as *hélices* (incluindo círculos horizontais e retas geradoras, casos extremos), e as da esfera são os meridianos. A unicidade das geodésicas – dados um ponto P numa superfície e um vetor tangente v em P , existe uma única geodésica que passa por P tangente a v – também segue da teoria das E.D.O.'s.

No cilindro e no cone, a unicidade também segue do fato de que eles são **localmente isométricos** ao plano (logo de **curvatura de Gauss** $K=0$), o que pode ser justificado com rigor matemático, exibindo-se uma isometria local explícita. Ou seja, eles podem ser cortados em uma geratriz e “abertos” até ficarem planos sem serem deformados, preservando-se, assim, a Primeira Forma Fundamental (comprimentos de curvas e áreas de regiões). Logo, como as retas são as geodésicas do plano, suas imagens pelas isometrias são as únicas geodésicas no cilindro e no cone, respectivamente. Todas as geodésicas $\beta(t)$ satisfazem uma equação diferencial não-linear de segunda ordem, simplificada em superfícies de revolução.

Estudamos o conceito de *Shape Operator*, $S(v)$, que mostra como uma superfície se curva localmente no espaço. A **curvatura normal** de uma superfície em um ponto P na direção v define a **Segunda Forma Fundamental**. Geometricamente, calcula-se a curvatura normal pela curvatura da curva plana obtida pela interseção da superfície com o plano seccionador que contém P e que é gerado por v e pelo vetor normal à superfície em P . O máximo e o mínimo das curvaturas normais em P são chamados de **curvaturas principais** (autovalores do *Shape Operator*), a semi-soma destas é a **curvatura média** H e seu produto é a **curvatura de Gauss** K . O **Teorema Egregium de Gauss** afirma que superfícies localmente isométricas possuem a mesma curvatura de Gauss, que depende só da métrica.

Exemplos: Existe uma família a 1-parâmetro, que liga o *catenóide* ao *helicóide*, de superfícies localmente isométricas e invariantes por “screw motions” (Fig. 3). É composta de **superfícies mínimas**; ou seja, minimizam localmente a área e têm curvatura média $H=0$. Por outro lado, observamos que a evoluta da *tractrix* é a *catenária*, da Mecânica, que é a curva geratriz da única **superfície mínima** de revolução em \mathbb{R}^3 , o *catenóide*. A *pseudo-esfera*, gerada pela rotação da *tractrix*, tem **curvatura de Gauss** $K=-1$ (Fig. 2).

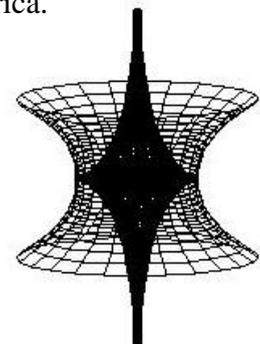


Fig. 2: A pseudo-esfera e o catenóide

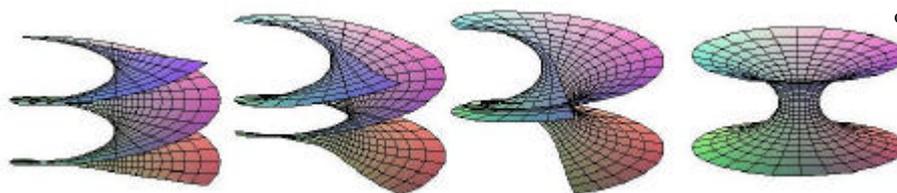


Fig. 3: A família catenóide-helicóide

Referências

1. DO CARMO, M. P. **Elementos de geometria diferencial**. Rio de Janeiro: Ed. Universidade de Brasília, 1979. 205p.
2. GRAY, A, ABBENA, E. e SALAMON, S. **Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica**. 3 ed. Florida: Chapman & Hall/CRC, 2006. 984p.
3. MONTIEL, S. e ROS, A. **Curves and Surfaces**. American Math. Society, 2005. 376p.