APLICAÇÃO DA PROBABILIDADE EM PASSEIOS ALEATÓRIOS

Aluno: Fernando Henrique do Rêgo Monteiro
Orientador: Lorenzo Díaz

Introdução

Foram estudados modelos que descrevem experimentos que possuem um número finito de resultados possíveis, alguns conceitos e alguns teoremas probabilísticos que dizem respeito ao que acontece, quando o número de experimentos é muito grande. Tal estudo é necessário para posterior aplicação em passeios aleatórios, objetivo final do projeto.

Serão apresentados a seguir algumas definições, leis e exemplos do que foi estudado.

Algumas definições

Seja **U** = {u^1, u^2,..., u^k} um conjunto correspondente a um número finito de resultados possíveis u^n/ n ? [1, k] para um certo experimento. A cada resultado u^n, é associado um número p^n / p^n ? [0 1] tal que ? p^n = 1. Tal número p^n é a probabilidade de que ocorra o resultado u^n nesse experimento. A probabilidade de uma parte de **U** é a soma das probabilidades de seus elementos. Em particular, p(**U**) = 1.

Uma variável aleatória é uma função F**:** **U** ? **R**. O valor esperado da variável aleatória E[F] = ? f^i p(F = f^i), onde f^i é valor que a variável assume e p(F = f^i) é a probabilidade de que a variável seja igual a f^i. Por exemplo, seja **U** = $\{0,1\}^2$, o conjunto de resultados possíveis de se jogar uma moeda duas vezes, onde 0 representa cara e 1 representa coroa. Seja F(a,b) = a + b. Então E[F] = 0 + ¼ + ¼ + ½ = 1.).

A lei dos grandes números

Seja Sn uma variável aleatória que é definida como o número de vezes em que ocorreu um determinado evento E num número n de experimentos. A lei dos grandes números diz que se p for a probabilidade de ocorrer o evento E, então o lim Sn/n = p. Essa lei também pode ser escrita em função do valor esperado E[Xn] de uma variável aleatória independente e identicamente distribuída Xn. Seja Kn = ? Xn, então lim Kn/n = E[Xn].

Exemplo 1

Podemos aplicar a lei dos grandes números, ao experimento de jogar uma moeda (que não se sabe a princípio se é viciada ou não.). Após jogar cara ou coroa um número muito grande de vezes, percebesse qual a relação entre a proporção do número de caras e a do número de coroas. Como se sabe, se a moeda não for viciada, a probabilidade de cara é igual a probabilidade de cair coroa. Pela lei dos grandes números, se a proporção do número de caras for diferente da do número de coroas, então a moeda é viciada.

A lei do logaritmo iterado

Essa lei mostra a taxa de convergência da lei dos grandes números. Seja Sn a variável aleatória definida acima e p a probabilidade de o evento associado a ela ocorra, então:

limsup (Sn – np)/(2p(1-p)nlnlnn)^(1/2) = 1 então, limsup (Sn-np)=8
e
liminf (Sn-np)/(2p(1-p)nlnlnn)^(1/2) = -1 então, liminf (Sn-np)= -8

Exemplo 2

Considere um passeio em Z, o conjunto dos inteiros, definido da seguinte forma: Seja Xn uma variável aleatória que representa o tamanho do passo na enésima passada. Suponha que existem números naturais k e b, tais que Xn = k, com probabilidade p e Xn = – b, com probabilidade 1- p, n é o número de passos (tempo), a posição inicial é o ponto 0 e n(inicial) = 0. Seja Jn = ?Xn, uma variável aleatória que representa a distancia até a origem no passo n. O valor esperado de Xn é:

$$E[Xn] = p(k+b) - b.$$

Se p > b/(b+k), então E[Xn] > 0 e pela lei dos grandes números:

lim Jn = 8. (O passeio se distancia da origem pelo lado positivo).

Se p < b/(b+k), então E[Xn] < 0. Pela lei dos grandes números:

lim Jn = -8. (O passeio se distancia da origem pelo lado negativo).

Isso não significa que se E[Xn] for maior que zero, uma vez começado o movimento o passeio nunca mais volte a origem. Neste caso, existe uma probabilidade positiva dele voltar para o ponto zero, mas pela lei dos grandes números, ele só fará isso um número finito de vezes. O mesmo se aplica caso E[Xn] seja menor que zero. Mas o que acontece se E[Xn] for nulo?

Este caso se torna menos trabalhoso de ser analisado, se b for igual k e igual a 1, então p = 0,5 e Jn = 2Sn –n (onde Sn é o número de passos positivos), pela lei do logaritmo iterado:

$$\limsup(Sn-n/2) = 8 \quad e \quad \liminf(Sn-n/2) = -8$$

Como Jn = 2(Sn-n/2),

$$\limsup Jn = 8 \quad e \quad \liminf Jn = -8.$$

Como cada passo tem um valor unitário, o passeio vai passar por todos os pontos de Z um número infinito de vezes. O mesmo resultado também é válido para outros valores de k e b, porém a demonstração é mais complexa. Generalizando, “Um passeio aleatório em Z é recorrente (volta a origem um número infinito de vezes) se e somente se é centrado (E[Xn] = 0)”.

Referências

Emmanuel lesigne, **Heads or Tails. An Introduction to Limit Theorems in Probability**. Volume 28.