

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA
DO RIO DE JANEIRO



DEM – DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

OTIMIZAÇÃO DE COLETORES SOLARES VIA ALGORITMOS GENÉTICOS

*Diego Rodrigues de Carvalho¹,
Washington Braga Filho².*



¹Aluno de Graduação do curso de dupla habilitação em Engenharia Mecânica e Produção da PUC-Rio.

²Eng. Mecânico, Ph. D., Professor Associado do Departamento de Engenharia Mecânica da PUC-Rio.

1. INTRODUÇÃO

Coletores solares são equipamentos utilizados para a coleta de energia solar. Embora apresentem diversas configurações, um modelo simples é constituído por painéis (ou placas) planos, que captam o calor do sol, e por tubos, por onde um fluido é bombeado e aquecido. Os coletores são instalados geralmente sobre telhados ou em suportes sobre lajes. São fabricados em sua maioria com uma estrutura externa de alumínio, tubos de cobre, vidro liso e vedação em borracha de silicone.

O modelo físico das placas solares coletoras é essencialmente o mesmo das superfícies estendidas (ou aletas), envolvendo Condução de Calor, Convecção e Radiação. Naturalmente, a presença da Radiação Solar altera o balanço de energia e com isto, energia é coletada pela placa e conduzida à parede do tubo coletor, ao invés de ser conduzida desta para o meio ambiente como ocorre nas aletas dissipadoras de energia. Da mesma forma que os modelos mais simples de aletas, os modelos normalmente empregados no estudo da otimização de coletores desprezam as perdas Radiativas para o ambiente. É fácil observar que um modelo mais sofisticado de uma superfície estendida, que leve em conta as perdas para o ambiente Convectivo-Radiativo, terá temperatura média inferior, aumentando os gradientes térmicos junto à raiz (ou superfície primária), sendo capaz de dissipar mais energia da superfície primária. Algo semelhante ocorre nos coletores: a superfície mais fria, pela mesma razão, resultará em gradientes térmicos mais intensos junto ao tubo, conduzindo assim mais energia para o fluido sendo aquecido. Ao aumentarmos a área do painel plano, mais energia vindo de uma fonte externa (por exemplo: o Sol) será coletada, o que é desejado. No entanto, mais energia será perdida para o ambiente (por Convecção e Radiação), a parte indesejável. Consequentemente, uma situação de otimização estará envolvida.

Modela-se, assim, a forma de trabalho do painel do coletor solar levando em consideração as perdas através de Convecção e Radiação Ambiental e o ganho através de Radiação Solar.

2. MODELAGEM FÍSICA E SOLUÇÃO CLÁSSICA

As perdas por Convecção são modeladas pela lei de resfriamento de Newton, que relaciona o calor transferido por ou pelo fluido com outros parâmetros:

$$Q_{\text{conv}} = hA_s(T_s - T_\infty) \quad (1)$$

Nesta equação, h é o coeficiente de calor transferido por Convecção, A_s é a área superficial, T_s refere-se à temperatura superficial e T_∞ à temperatura do fluido no infinito. Uma das maneiras de aumentar o calor trocado é aumentar o coeficiente h , e a outra, é aumentar a área da superfície (já que T_s e T_∞ são mantidos constantes). A primeira opção implica na instalação de uma bomba que aumente a velocidade do fluido, uma situação nem sempre adequada devido ao grande consumo de energia. Uma alternativa mais viável é o uso de superfícies estendidas, feitas de um material de condutividade elevada, como o alumínio, por exemplo, para aumentar o contato do fluido com a superfície primária (ou base) e assim, a dissipação de calor.

Além de conduzirem calor por Convecção, essas superfícies estendidas também dissipam energia por Radiação, que geralmente é desprezada nos problemas de engenharia, em especial nos problemas de otimização. O mecanismo de troca de calor por Radiação é explicado pela lei de Stefan-Boltzmann:

$$Q_{rad} = \varepsilon \sigma A_s (T_s^4 - T_{amb}^4) \quad (2)$$

Nesta equação, ε é a emissividade do material da placa na faixa de comprimento de ondas da Radiação emitida e σ é a constante de Stefan-Boltzmann. Claramente, T_{amb} (da lei de Radiação) é diferente de T_∞ (da lei de Convecção), uma vez que a primeira está associada à temperatura do fluido nas redondezas da superfície e a segunda, relacionada à temperatura do ambiente ao redor da superfície. Sem perda de generalidades, neste trabalho, considera-se $T_{amb} = T_\infty$. Interações térmicas entre a superfície estendida e a superfície primária são também desprezadas nesse primeiro estágio de trabalho.

No estudo dos coletores, é comum a definição de um fator de desempenho que pode ser definido por Q , o fluxo de calor coletado na superfície primária. Este trabalho foca a otimização via algoritmos genéticos do aumento do calor Q absorvido pelo coletor, mantendo-se constante a área (ou o volume) da placa coletora. Reconhecendo que a placa coletora funciona essencialmente como uma aleta, os conceitos de otimização geométrica a partir da definição de uma área (ou eventualmente, de um volume) pré-determinado podem ser aplicados. Assim, o processo de otimização consiste na determinação das dimensões ótimas (indicadas por *) da espessura δ , e da largura L , dado um perfil de área transversal ($A_b = \delta L$, para uma aleta retangular).

Algumas obras já trataram da relevância da Radiação (e.g. Razelos [2000]) sobre os problemas de Condução de calor em superfícies estendidas e Coletores, mas deram ênfase a complexas soluções numéricas. Uma abordagem diferente e simples é proposta aqui para o mesmo problema. A partir das equações que envolvem Convecção + Radiação no painel coletor, pretende-se encontrar a sua espessura ótima, através do uso de algoritmos genéticos, e relacioná-la à espessura ótima obtida para o caso de Convecção pura. A vantagem nesta abordagem vem do conhecido fato que o modelo de Convecção pura apresenta solução semi-analítica simples, disponível em Schneider [1955], por exemplo, para diversos tipos de perfis de aletas. Esta abordagem foi utilizada com sucesso por Braga [2007] e é agora aplicada neste trabalho aos problemas de otimização em Coletores Solares. A espessura ótima para uma aleta envolvendo Condução – Convecção é obtida a partir do desenvolvimento abaixo. O calor trocado na raiz da aleta é dado pela Equação 3:

$$q_b = 2(T_b - T_\infty) \sqrt{kh\delta} \tanh(2L\sqrt{h/k\delta}) \quad (3)$$

Diferenciando esta expressão com relação à espessura da raiz, δ , obtemos:

$$3\lambda \operatorname{sech}^2 \lambda = \tanh \lambda \quad (4)$$

Onde $\lambda = (A_b / 2)(\delta / 2)^{-3/2} \sqrt{h/k}$. A solução da Equação 4, obtida numericamente, é $\lambda = 1.4192$. Assim, a espessura ótima para uma área transversal constante, neste modelo, é dada pela Equação 5:

$$\delta_c^* = 2 \left(A_b^2 h / 4 \lambda_{opt}^2 k \right)^{1/3} \quad (5)$$

Nesta expressão, δ_c^* é a espessura ótima para a aleta (ou placa coletora) para o modelo de Convecção pura. A largura ótima é dada pela Equação 6:

$$L^* = A / \delta_c^* \quad (6)$$

Com a obtenção de uma relação definida e passível de ser generalizada para diversos perfis de superfícies, Schneider [1955], a determinação da espessura ótima e também do fluxo de calor para uma situação genérica se reduz à solução de algumas equações simples, em vários casos, linear. Infelizmente, a simplicidade deste modelo matemático, que ignora os efeitos de Radiação, não lineares, reduz suas vantagens. Pelo comum, a solução apresentada até hoje na literatura envolveu sempre soluções numéricas, o que é evidentemente, um outro problema.

Na próxima seção, veremos o equacionamento matemático mais completo e o método de solução utilizado na busca de uma metodologia de cálculo mais simples para este problema.

3. EQUACIONAMENTO MATEMÁTICO E MÉTODO DE SOLUÇÃO

O Balanço de Energia (1ª. Lei da Termodinâmica) para um coletor solar, com painel de seção transversal retangular, em uma situação na qual Convecção e Radiação sejam igualmente relevantes se escreve como:

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{Ph}{kA_s}(T - T_\infty) - \frac{P\varepsilon\sigma}{kA_s}(T^4 - T_{amb}^4) + \frac{\alpha R_{sol}w}{kA_s} = 0 \quad (7)$$

Como condições de contorno, temos que na raiz do painel, $x = 0$, a temperatura é especificada como $T(x = 0) = T_b$ e em $x = L$, na extremidade, temos que $dT/dx = 0$. Nesta equação introduzem-se novos termos: k se refere à condutividade térmica do material da placa coletora, α é a absortividade do material da placa na faixa de comprimento de ondas do Sol, R_{sol} refere-se ao fluxo de energia solar, w é a profundidade da superfície estendida e P o seu perímetro (ver figura 3.1). A solução numérica desta equação foi obtida através do Método de Runge-Kutta disponível no programa MATLAB. Como já foi mencionado anteriormente, considerou-se $T_{amb} = T_\infty$, sem perda de generalidades.

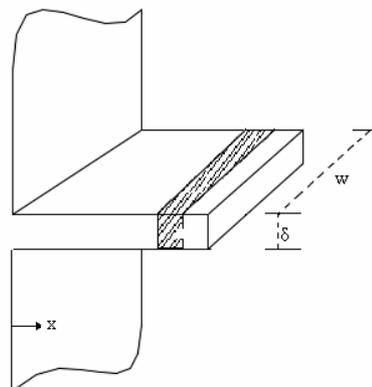


Figura 1: superfície estendida

O código abaixo foi implementado no MATLAB e usado como função objetivo para o algoritmo genético. Em verde, estão assinaladas as variáveis do problema; em azul, as funções da biblioteca do MATLAB para resolver EDO's de 2ª ordem; e a equação em vermelho representa a equação (7) com o valor de $\sigma \times \varepsilon$ já substituído (5.1075×10^{-8}). As condições de contorno estão representadas na função *res*. Uma atenção especial deve ser dada à equação em laranja, pois ela depende da equação (7) e define a quantidade de calor trocado na raiz do painel do coletor. É essa equação (8) que deve ser otimizada:

$$Q = \frac{-kA_B \omega}{L} \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} \quad (8)$$

```

function Q = objfunCvRColetor (L)

global Ab w h k To Too alfa H

if L>0

solinit = bvpinit(linspace(0,L,10),[To;0]);
sol = bvp4c(@optode,@optbd2,solinit);

resp=sol.yp(1,1);

Q=(-1)*k*Ab*w*resp/L;

else

Q=0;

end;

function dxdT = optode(x,T)

dxdT = [ T(2)

(h*2*((Ab/L)+w)*(T(1)-Too)/(k*Ab*w/L)) +

(5.1075*(10^(-8))*2*((Ab/L)+w)*(T(1)^4-(Too)^4)/(k*Ab*w/L)) -

(alfa*H*w/(k*Ab*w/L))

];

end

function res = optbd2(Ta,Tb)

res = [ Ta(1) - To

```

```

    Tb(2) ];

    end
end
    
```

Na próxima seção, o método de solução do problema de otimização será apresentado.

4. ALGORITMO GENÉTICO

O algoritmo genético segue de certa forma, a idéia da Seleção Natural de Darwin e vem se tornando uma ferramenta versátil em diversas áreas da engenharia.

Sua implementação é feita da seguinte forma: gera-se uma população de *indivíduos*, sendo cada um deles uma possível solução para o problema; no passo seguinte, os indivíduos da população passam por um processo de *evolução*, aonde são avaliados individualmente e a cada um atribui-se um grau de aptidão de acordo com o quanto ele é bom para ser a solução. Após serem avaliados, os indivíduos que possuem maior grau são selecionados e *cruzam* com outros indivíduos da população ou sofrem mutação. As propriedades de cada indivíduo são descritas usando *cromossomos*, que são versões binárias do indivíduo, desta forma, para se fazer o cruzamento dos indivíduos é feita a operação de *crossover*. Esta operação consiste na troca entre os alelos dos cromossomos dos indivíduos selecionados.

O processo de mutação ocorre ocasionalmente pelo seguinte mecanismo: um único alelo do cromossomo é selecionado aleatoriamente, sendo depois modificado, gerando assim, um novo indivíduo.

Os processos de reprodução e mutação gerarão novos indivíduos que compartilham os cromossomos de seus pais. Os novos indivíduos passarão então a ser a nova população de soluções, se tornando uma nova *geração*. O mesmo processo feito com a primeira geração (também chamada de geração zero) será feito com esta nova geração e com as seguintes, de forma cíclica até que a população venha a convergir para uma solução ótima ou que o algoritmo atinja um número de gerações pré-determinado.

O algoritmo genético foi utilizado em sua versão disponível no programa MATLAB, que possui ainda um *toolbox* próprio para a sua aplicação. Através do MATLAB, foi possível aplicar o algoritmo genético nas situações de Transmissão de Calor por Convecção pura e pela combinação de Convecção e Radiação, variando as propriedades do material e as temperaturas de trabalho.

Foram feitas diversas operações com o algoritmo para avaliar quais seriam as melhores opções de trabalho para a equação a ser otimizada. Como o valor de L^* já é conhecido pela literatura para o caso de Convecção Pura, testa-se o algoritmo nessa condição. A tabela 1 contém as configurações do painel do coletor e o valor de L^* .

Tabela 1 – Configurações do painel do coletor solar

Configurações
$Ab = 0,001 \text{ m}^2$
$w = 1 \text{ m}$
$h = 10 \text{ W/m}^2\text{K}$
$k = 237 \text{ (Al)}$
$To = 305,25 \text{ K}$
$Too = 330 \text{ K}$

alfa = 1
H = 1000 W/m ²
L* = 0,2876 m

As tabelas 2 a 6 mostram o comportamento do algoritmo para as diversas opções de trabalho, relacionando o L encontrado com o L*. São feitos 5 experimentos (5 valores de L diferentes) para cada opção.

Tabela 2 – Porcentagem de *crossover* (0% a 100%)

Experimento	0	Erro	20	Erro	40	Erro
1	0,2885	0,312934631	0,2942	2,294853964	0,2730	5,076495132
2	0,2839	1,28650904	0,2892	0,556328234	0,2907	1,077885953
3	0,2882	0,208623088	0,2823	1,842837274	0,2881	0,173852573
4	0,2856	0,695410292	0,2896	0,695410292	0,2871	0,173852573
5	0,2903	0,938803894	0,2918	1,460361613	0,2847	1,008344924
Erro Médio		0,688456189		1,369958275		1,502086231

60	Erro	80	Erro	100	Erro
0,2929	1,842837274	0,2903	0,938803894	0,3252	13,07371349
0,2733	4,972183588	0,2754	4,242002782	0,3094	7,579972184
0,2894	0,625869263	0,2600	9,596662031	0,3399	18,18497914
0,2829	1,634214186	0,2677	6,919332406	0,3390	17,87204451
0,2842	1,182197497	0,3022	5,076495132	0,2755	4,207232267
	2,051460362		5,354659249		12,18358832

Embora o melhor resultado encontrado aqui para a porcentagem de *crossover* seja de 0%, foi decidido adotar o padrão do MATLAB de 80% para o algoritmo. Já que é de interesse o estudo desse método.

Tabela 3 – *Elite Count* (1 a 3)

Experimento	1	Erro	2	Erro	3	Erro
1	0,2717	5,528511822	0,2810	2,294853964	0,2519	12,41307371
2	0,2750	4,38108484	0,2907	1,077885953	0,2864	0,417246175
3	0,2900	0,83449235	0,2390	16,8984701	0,2665	7,336578581
4	0,2689	6,502086231	0,2903	0,938803894	0,2911	1,216968011
5	0,2864	0,417246175	0,2856	0,695410292	0,2895	0,660639777
Erro Médio		3,532684284		4,38108484		4,408901252

Essa opção faz com que somente um indivíduo sobreviva intacto até a próxima geração.

Tabela 4 – Método Heurístico de *crossover*

Experimento	
1	0,2876
2	0,2876
3	0,2876
4	0,2876
5	0,2876
100% de acerto	

Tabela 5 – Função híbrida *fminsearch*

Experimento	
1	0,2876
2	0,2876
3	0,2876
4	0,2876
5	0,2876
100% de acerto	

Tabela 6 - Método Gaussiano de Mutação (com ou sem)

Experimento	com	Erro	sem	Erro
1	0,2840	1,251738526	0,2706	5,910987483
2	0,2875	0,034770515	0,3187	10,81363004
3	0,2866	0,347705146	0,2813	2,19054242
4	0,2859	0,591098748	0,2908	1,112656467
5	0,2880	0,139082058	0,2845	1,077885953
Erro Médio		0,472878999		4,221140473

Tabela 7 – Tamanho da população após adotada todas as melhores opções (50 a 5)

Experimento	50	Erro	40	Erro
1	0,2876	0	0,2876	0
2	0,2876	0	0,2876	0
3	0,2876	0	0,2876	0
4	0,2876	0	0,2876	0
5	0,2876	0	0,2876	0
Erro Médio		0		0

20	Erro	10	Erro	5	Erro
0,2876	0	0,2876	0	0,2875	0,034770515
0,2876	0	0,2876	0	0,2871	0,173852573
0,2876	0	0,2876	0	0,2861	0,521557719
0,2876	0	0,2876	0	0,2881	0,173852573
0,2876	0	0,2876	0	0,2864	0,417246175
	0		0		0,264255911

Em relação às essas opções, ressaltam-se: o método heurístico de cruzamento que faz com que os filhos levem maior número de genes dos pais mais bem ranqueados; a opção exclusiva do MATLAB chamada de função híbrida do tipo *fminsearch* que permite que, ao término da busca do algoritmo genético, seja executada uma busca rápida pelo método de *Nelder-Mead* tendo como chute inicial o ponto ótimo encontrado. Com essas opções, o tempo de execução do algoritmo caiu consideravelmente, tornando-o uma ferramenta extremamente prática na otimização dos problemas encontrados neste trabalho.

Tabela 8 – Relação geral das opções

Tamanho das Populações	10
Tipo de Ranqueamento dos Indivíduos	Por Resultado
Tipo de Seleção Natural	Indivíduo de Melhor Ranking
Tipo de Mutação	Método Gaussiano
Número Máximo de Gerações	50
Percentagem de <i>crossover</i>	80%
Método de <i>crossover</i>	Heurístico
Função híbrida	<i>fminsearch</i>

Pelo exposto até esta seção, o equacionamento matemático foi apresentado para o problema de interesse envolvendo perdas por Convecção e Radiação e o método de otimização a ser empregado na busca da solução ótima para a espessura na raiz da placa coletora (e conseqüentemente para a sua largura). A partir do programa escrito no MATLAB, uma série extensa de resultados foi produzida com o objetivo de se obter um adequado entendimento do problema em questão. De posse destes resultados, investigou-se uma nova abordagem, extremamente mais simples, para a generalização dos mesmos não só para outras faixas de parâmetros mas também para outras geometrias. Esta nova abordagem, apresentada com sucesso por Braga [2007], utiliza os resultados obtidos para o modelo simplificado, aquele envolvendo apenas perdas por Convecção, para a obtenção dos resultados para o modelo mais sofisticado, isto é, aquele envolvendo Convecção e Radiação. Isto é discutido na próxima seção.

5. RESULTADOS

A Figura 2 abaixo mostra uma seqüência de resultados obtidos para diversas configurações (materiais, níveis de convecção, volumes, temperaturas, etc.). Ela indica claramente que nestas mais diversas situações, a espessura ótima da placa coletora em função das perdas por Convecção e Radiação é sempre maior que a espessura ótima da placa em presença apenas da Convecção. Isto significa, em primeira instância, que as placas coletoras otimizadas em função das perdas mais realistas devem ser mais curtas que às placas otimizadas pelas perdas mais simples (de Convecção pura). Isto acontece, pois a área transversal (o produto da espessura na raiz e a largura da placa) é mantida constante. A maior espessura corresponde à menor largura.

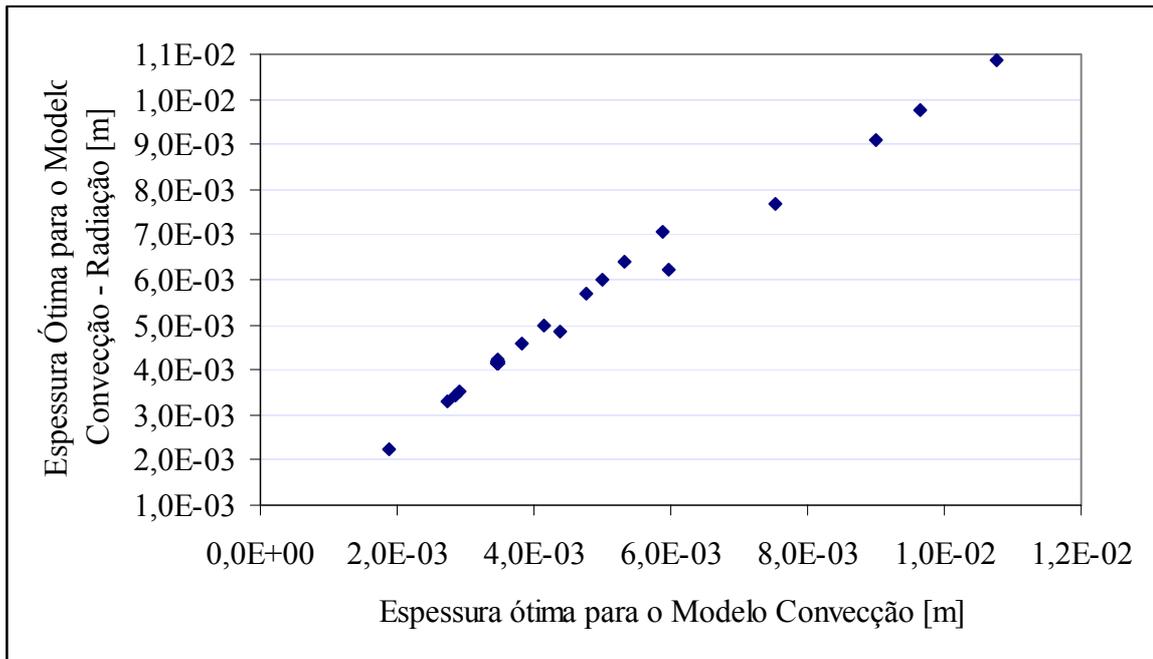


Figura 2: Espessuras Ótimas para dois modelos de placas coletoras

Com este entendimento, procurou-se analisar o problema de uma forma mais completa, isto é, soluções numéricas intensas foram obtidas. Entretanto, o custo da geração destas soluções pode ficar proibitivo, especialmente pelos diferentes perfis de placas passíveis de serem estudadas (retangular, trapezoidal, parabólicas, etc).

Uma metodologia de cálculo das perdas reais com menor demanda computacional precisava ser obtido. Após cuidadosa análise dimensional do problema, observou-se que a razão das espessuras ótimas apresentava excelente correlação com a temperatura normalizada, T_b / T_∞ . A Figura 3 mostra uma série destes resultados para diferentes valores do parâmetro MN, definido como se segue:

$$MN = \frac{h}{\varepsilon \sigma T_{amb}^3} \quad (9)$$

Como pode ser notado, este parâmetro indica a relevância relativa da Convecção sobre a Radiação. Valores baixos de MN indicam que os efeitos das perdas radiativas para o ambiente são importantes (ou de mesma ordem) que os efeitos das perdas convectivas. As equações de correlação mostradas na figura indicam muito bons resultados. Assim, uma vez que o parâmetro MN seja definido para uma configuração qualquer, a espessura ótima da placa coletora que deverá ser utilizada pode ser obtida diretamente em função da espessura ótima da placa coletora na situação de Convecção pura, que está disponível analiticamente na literatura, isto é, com nenhum esforço computacional.

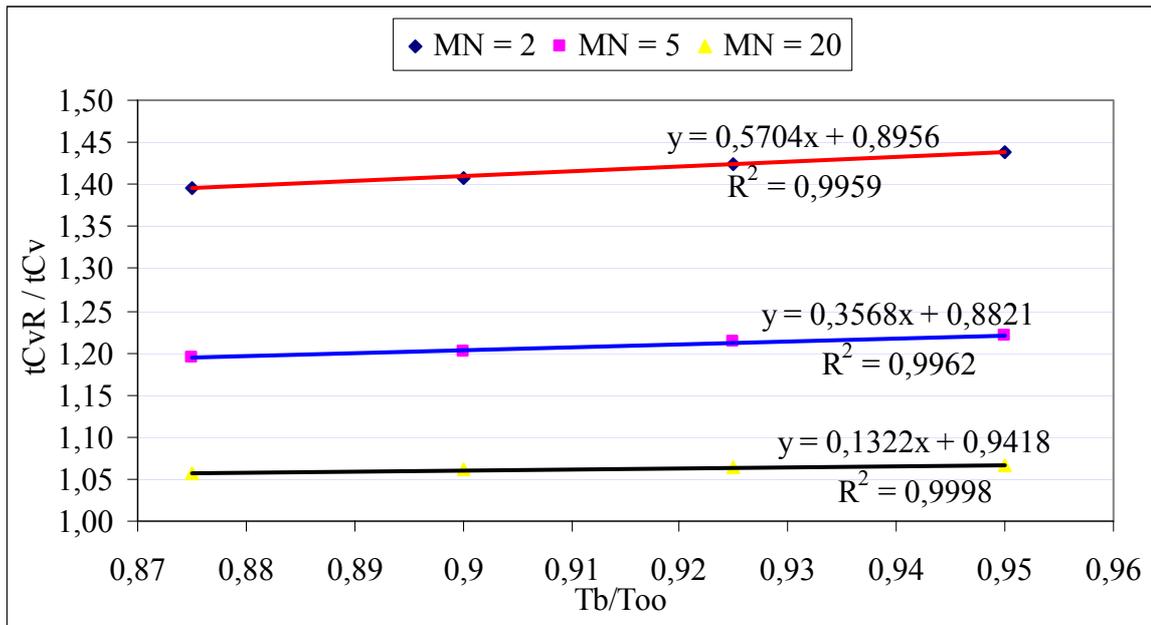


Figura 3: Razão de Espessuras em função da temperatura adimensional na raiz da placa coletora.

Neste contexto, o que se pretende agora é a generalização de tais resultados, o que pode ser feito pela estimativa de como as constantes das retas mostradas na figura variam em função dos demais parâmetros do problema, em especial, o parâmetro MN. Deve ser mencionado que estes resultados independem do material, do perfil da placa plana coletora, como mostrado em outro contexto em Braga [2007].

Tabela 9 - Influência do parâmetro de Radiação Solar

Espessuras ótimas [m]	Convecção Pura	Convecção + Radiação	
		MN = 2	MN = 5
$\alpha R = 700 \text{ W/m}^2$	3,477E-03	4,936E-03	4,203E-03
$\alpha R = 800 \text{ W/m}^2$	3,477E-03	4,943E-03	4,209E-03
$\alpha R = 900 \text{ W/m}^2$	3,477E-03	4,950E-03	4,216E-03
$\alpha R = 1000 \text{ W/m}^2$	3,477E-03	4,955E-03	4,221E-03

A Tabela 9 mostra os resultados para a espessura ótima para o coletor, em função de vários níveis de Radiação Solar (e absorvidade da placa), em função ainda das perdas por Convecção pura e Convecção + Radiação. Como podem ser vistas, as diferenças são bastante significativas.

Embora a construção da placa coletora dependa essencialmente da espessura na raiz e do comprimento, para cada valor de área transversal (ou volume, ou peso), e isto está resolvido a partir das informações contidas na Figura 3, o engenheiro necessita constantemente da informação do calor trocado. Continuando a investigação, analisou-se o calor trocado na situação em questão. Entre outras opções, uma das mais razoáveis sob o ponto de vista de análise dimensional é mostrada na Figura 4 que relaciona a razão entre o calor trocado na Superfície Primária do Coletor nas duas situações já mencionadas, isto é, em presença da Convecção e da Radiação, e com Convecção pura, e a razão entre as espessuras

ótimas nos dois casos. Como pode ser visto, a correlação indica resultados piores, se comparados com os resultados da Figura 3, mas ainda excelentes do ponto de vista de engenharia.

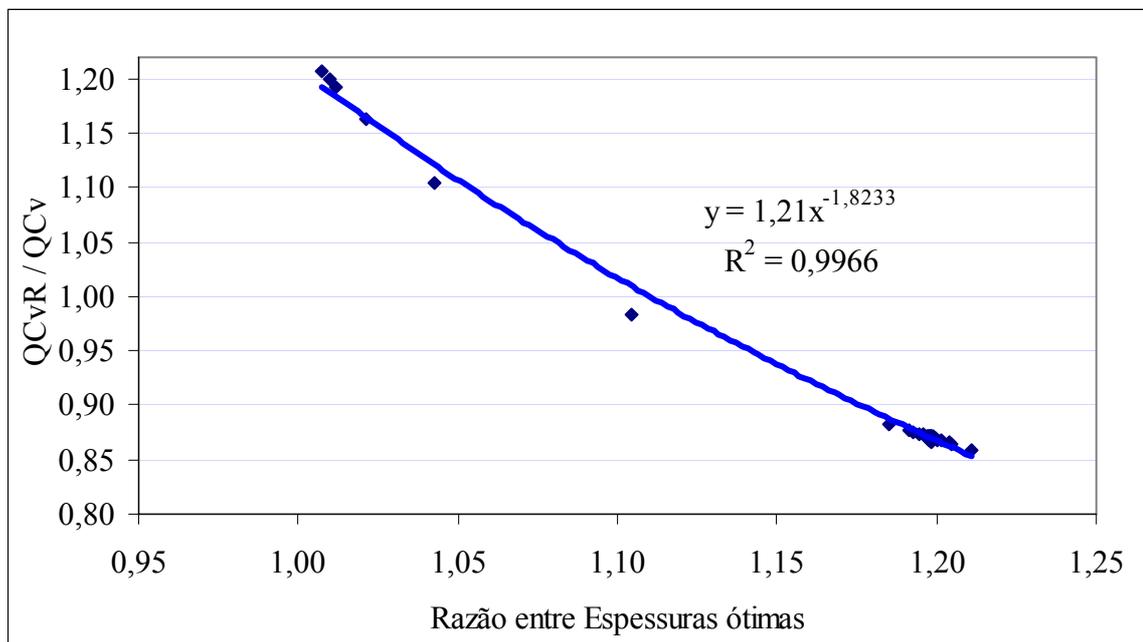


Figura 4: Razão entre os calores trocados na superfície primária e as espessuras ótimas em função dos modelos Físicos

Embora haja nitidamente erros nesta abordagem, estimados em média de 4% nos diferentes casos tratados, a rapidez da obtenção de tais resultados mais que justificam seu uso.

6. CONCLUSÕES

Este trabalho apresentou uma nova metodologia de cálculo das dimensões de placas coletoras otimizadas em função de peso, volume ou área, em uma situação bastante mais próxima da realidade. Evitando complexas simulações numéricas do problema, a abordagem envolve o uso de resultados clássicos, disponíveis na literatura, que indicam as dimensões otimizadas para o modelo Físico que despreza Radiação. Reconhecendo, em primeiro lugar, a precariedade desta aproximação, embora justificável à época, o presente trabalho oferece uma opção mais simples que a estritamente numérica. Todos os resultados até agora obtidos, considerando-se diferentes materiais, áreas transversais, níveis de Convecção e Radiação, etc., corroboram o acerto nesta abordagem. Em continuação a este projeto, espera-se incluir a presença do tubo na análise térmica.

AGRADECIMENTOS

Parte deste trabalho foi desenvolvido com o apoio do Programa Institucional de Iniciação Científica do CNPq – PUC –Rio. Os autores agradecem sinceramente o apoio recebido.

REFERÊNCIAS

- Braga, W., 2007, “Optimization of Radiative-Convective Extended Surfaces”, aceito para publicação no ECOS 2007: 20th International Conference on Efficiency, Cost, Optimization, Simulation and Environmental Impact of Energy Systems”, Pádua, Itália.
- Razelos, P. & Kakatsios X., 2000, “Optimum dimensions of convecting-radiating fins: Part I – longitudinal fins, Applied Thermal Engineering”, 20, pp 1161-1192.
- Schneider P.J., “Conduction Heat Transfer”, 2a. Impressão, Addison-Wesley Publishing Co, Inc., Reading, Massachusetts, 1955.