PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO DE JANEIRO

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL

APLICAÇÕES DE MÉTODOS DE ENERGIA A PROBLEMAS DE INSTABILIDADE DE ESTRUTURAS

Juliana Braghini Ramalho[1]
Raul Rosas e Silva[2]

[1]*Aluna de graduação do curso de Engenharia Civil da PUC-Rio*
[2]*Professor do Departamento de Engenharia Civil da PUC-Rio.*

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

A análise estrutural se reveste de fundamental importância na construção civil, uma vez que ela compreende a idealização do comportamento das estruturas, sendo este definido em função de diversos parâmetros.

De uma forma geral, o objetivo da análise estrutural é determinar esforços internos e externos (cargas e reações de apoio) e as correspondentes tensões resultantes, bem como a determinação dos deslocamentos e deformações da estrutura, especialmente as que são estaticamente indeterminadas.

Dentro desta definição, também é importante compreender os conceitos de trabalho e energia, para que então o estudo possa ser aprofundado no trabalho virtual, na energia de deformação, na energia potencial e na energia complementar, visto que esses conceitos permitem que o comportamento das estruturas seja mais bem compreendido.

Além disso, com a criação e desenvolvimento de programas de computação gráfica, a análise estrutural passou a ser vista como uma ótima ferramenta para simular o comportamento das estruturas. Com isso, o desenvolvimento de métodos derivados de teoremas como Teorema Recíproco de Maxwell, os 1º e 2º Teoremas de Castigliano e o Teorema de Crotti-Engesser passaram a se mostrar eficientes, permitindo a obtenção de resultados mais precisos no estudo de estruturas lineares e não-lineares, com efeitos de instabilidade.

2. METODOLOGIA

2.1 PRINCÍPIO DO TRABALHO VIRTUAL

A palavra *virtual* significa que as quantidades são imaginárias e que não existem no sentido real ou físico. Logo, deslocamento virtual é imaginário e arbitrariamente imposto sobre o sistema estrutural. Já o trabalho realizado por forças reais durante um deslocamento virtual é chamado de trabalho virtual.

Se sistema de cargas em equilíbrio atua sobre um corpo rígido, pode-se dar a ele um deslocamento virtual consistindo numa translação, rotação ou uma combinação de ambas. Durante esse deslocamento virtual, o trabalho realizado pelas forças deve ser igual a zero porque as forças estão em equilíbrio. Esta afirmação consiste no princípio dos deslocamentos virtuais.

Também é possível aplicar o princípio dos deslocamentos virtuais aos casos de estruturas deformáveis. Para isto, deve-se levar em consideração o trabalho virtual das forças externas e internas.

Para esta situação, pode-se imaginar uma estrutura em equilíbrio, sob a ação de forças, momentos fletores, torques e carga distribuída. Admite-se que a estrutura é submetida a uma deformação virtual que consiste em uma pequena mudança na sua forma.

Durante a deformação virtual, cada elemento da estrutura será deslocado para uma nova posição, acarretando a deformação da própria estrutura. Conseqüentemente, as forças exercidas num elemento (tensões resultantes e cargas externas) realizarão trabalho virtual. Este trabalho virtual é dado por dW_e e pode ser subdividido em: dW_r (trabalho causado pelo deslocamento do elemento como corpo rígido – translação e rotação) e dW_d (trabalho associado à deformação do elemento). Logo:

$$dW_e = dW_r + dW_d \tag{1}$$

Como o elemento está em equilíbrio, o trabalho realizado pelas forças externas e internas durante o deslocamento do corpo é nulo ($dW_r = 0$). Assim: $dW_e = dW_d$, ou seja, o trabalho virtual total é igual ao trabalho virtual realizado por estas forças durante a deformação virtual do elemento.

Fazendo a integração para toda a estrutura:

$$\int dW_e = \int dW_d \qquad (2)$$

A integral do primeiro membro da equação é igual ao trabalho virtual das forças externas atuantes sobre a estrutura, sendo chamado de trabalho externo, W_{ext}.

A integral do segundo corresponde ao trabalho virtual associado à deformação do elemento. Este trabalho inclui os efeitos de todas as forças que atuam no elemento, tensões resultantes e forças externas. Entretanto, quando um elemento se deforma, somente as tensões resultantes realizam algum trabalho. Portanto, o segundo membro da equação (2.2) representa o trabalho virtual das tensões resultantes apenas. Este trabalho virtual é igual ao realizado pelas tensões resultantes quando os elementos nos quais elas atuam são deformados virtualmente. A quantidade total deste trabalho virtual obtido pelo somatório de todos os elementos é chamada de trabalho interno, W_{int}.

Assim, obtém-se a seguinte equação:

$$W_{ext} = W_{\text{int}} \qquad (3)$$

A equação acima representa o princípio do trabalho virtual e pode ser definida da seguinte forma: quando a uma estrutura deformável, em equilíbrio, sob a ação de um sistema de cargas, é dada uma pequena deformação virtual, o trabalho realizado pelas forças externas é igual ao trabalho virtual realizado pelas forças internas.

Observações importantes:

a) A deformação virtual, ou o deslocamento virtual, deve ser compatível com os suportes da estrutura e manter sua continuidade. A mudança virtual na forma pode ser arbitrariamente imposta à estrutura e não deve ser confundida com deformações causadas por cargas reais.

b) O princípio do trabalho virtual aplica-se a todas as estruturas a despeito do material se comportar linearmente ou não, elástica ou inelasticamente.

2.2 MÉTODO DA CARGA UNITÁRIA PARA CÁLCULO DOS DESLOCAMENTOS

O método da carga unitária pode ser utilizado para determinação de deslocamentos das estruturas estaticamente determinada (estruturas que podem ter seus esforços internos e externos determinados apenas por condições de equilíbrio) e indeterminada, a partir do princípio do trabalho virtual.

Para a aplicação desse método, devem ser considerados dois sistemas de carregamento:

- **1º sistema**: consiste na estrutura submetida a cargas reais, mudanças de temperatura ou outras causas que provoquem deslocamento.

- **2º sistema**: consiste em uma carga unitária que age sozinha na estrutura.

Por carga unitária entende-se uma carga fictícia ou substituta, introduzida para se calcular o deslocamento Δ da estrutura causado por forças reais, podendo este ser uma translação, rotação, um deslocamento relativo ou uma rotação relativa.

Quando a carga unitária atua na estrutura, ela produz reações nos apoios e tensões nos membros $(N_U, M_U, V_U \ e\ T_U)$ que, combinadas com a carga unitária e as reações, formam um sistema de forças em equilíbrio.

De acordo com o princípio do trabalho virtual, ao impor uma pequena deformação virtual, o trabalho virtual das forças externas será igual ao trabalho virtual das forças internas. O método da carga unitária correlaciona-se com o princípio do trabalho virtual na medida em que é preciso escolher adequadamente a deformação virtual. Neste caso, tomam-se as deformações reais da estrutura causada pelo primeiro sistema de carregamento, como as deformações virtuais a serem impostas sobre o segundo sistema (a estrutura com carga unitária). O trabalho virtual externo que ocorre durante essa deformação virtual, é realizado pela carga unitária, pois está é a única carga externa atuando na estrutura. Temos assim:

$$W_{ext} = 1 \cdot \Delta \tag{4}$$

Já o trabalho virtual interno é realizado pelas tensões resultantes $(N_U, M_U, V_U \ e\ T_U)$, quando os elementos da estrutura são deformados virtualmente. Entretanto, as deformações virtuais são escolhidas para serem as mesmas das deformações reais $(d\delta, d\theta, d\lambda \ e\ d\phi)$ que ocorrem na estrutura que suporta as cargas reais. Logo:

$$W_{\text{int}} = \int N_U \ d\delta + \int M_U \ d\theta + \int V_U \ d\lambda + \int T_U \ d\phi \tag{5}$$

Como $W_{ext} = W_{\text{int}}$, então temos a equação fundamental da carga unitária:

$$\Delta = \int N_U \ d\delta + \int M_U \ d\theta + \int V_U \ d\lambda + \int T_U \ d\phi \tag{6}$$

Resumindo:

- Δ: deslocamento a ser calculado (translação, rotação, deslocamento relativo e rotação relativa).

- $N_U, M_U, V_U \ e\ T_U$: tensões resultantes (força axial, momento fletor, força cortante e momento de torção causados pela carga unitária correspondente a Δ).

- $d\delta, d\theta, d\lambda \ e\ d\phi$: deformações causadas pelas cargas reais.

A equação fundamental do método da carga unitária é bastante geral, não estando sujeita a nenhuma restrição relativa ao comportamento linear do material ou da estrutura, ou seja, não é necessário que o princípio da superposição seja válido. A situação mais comum, no entanto, ocorre quando o material segue a Lei de Hooke e a estrutura tem comportamento linear. Neste caso, é possível obter expressões para as deformações $d\delta, d\theta, d\lambda \; e \; d\phi$. Representando-se as tensões resultantes na estrutura causadas por cargas reais por $N_L, M_L, V_L \; e \; T_L$, então a equação do método da carga unitária passa a ser:

$$\Delta = \int \frac{N_U \; N_L \; dx}{EA} + \int \frac{M_U \; M_L \; dx}{EI} + \int \frac{\alpha_s \; V_U \; V_L \; dx}{GA} + \int \frac{T_U \; T_L \; dx}{GJ} \tag{7}$$

A equação acima pode ser usada na determinação do deslocamento Δ em qualquer ponto da estrutura, quando o material é linearmente elástico e o princípio da superposição for válido.

Se os deslocamentos são causados por efeitos que não cargas, como a mudança de temperatura, é necessário utilizar expressões apropriadas para $d\delta, d\theta, d\lambda \; e \; d\phi$.

2.3 TEOREMAS RECÍPROCOS

O princípio dos trabalhos virtuais pode ser utilizado para formular dois teoremas que são úteis na análise de estruturas lineares. Esses teoremas são chamados de reciprocidade e podem ser: Teorema de Maxwell e a sua versão generalizada, o Teorema de Betti.

Considerando dois sistemas estruturais, A e B (Fig. 1), tem-se:

- A é composto de um sistema de forças (F_A, f_A) associado a uma configuração deformada (D_A, d_A).
- F_A são as forças externas atuando sobre a estrutura, f_A são os esforços internos em equilíbrio com F_A, D_A é o campo de deslocamentos externos, e d_A são os deslocamentos internos.
- O sistema B é análogo ao A e composto de um sistema de forças (F_B, f_B) associado a uma configuração deformada (D_B, d_B).

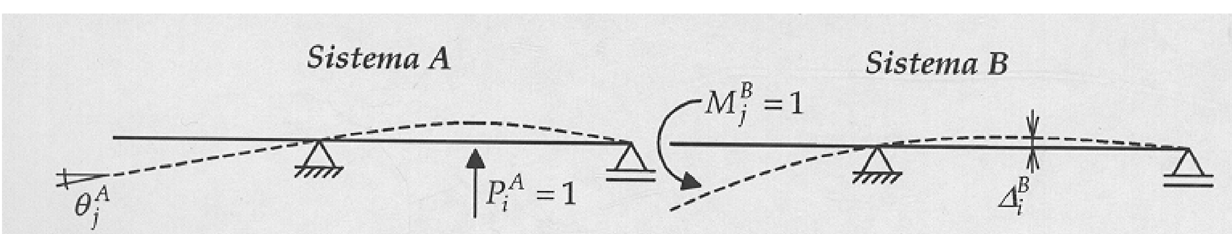

Figura 1 – Teorema de Maxwell para forças generalizadas unitárias.

O princípio dos trabalhos virtuais pode ser aplicado a esses sistemas de duas maneiras: ou considerando o sistema A como real e o sistema B como virtual e a outra ao contrário. Assim:

$$\sum F_A \cdot D_B = \int f_A \cdot d_B \tag{8a}$$

$$\sum F_B \cdot D_A = \int f_B \cdot d_A \tag{8b}$$

Como a estrutura apresenta um comportamento linear:

$$\int f_A \cdot d_B = \int f_B \cdot d_A \tag{9}$$

Com isso, pode-se enunciar o Teorema de Betti: “se uma estrutura linear é submetida a dois sistemas de forças generalizadas, o trabalho realizado pelas forças generalizadas do primeiro sistema com os correspondentes deslocamentos generalizados do segundo é igual ao trabalho realizado pelas forças generalizadas do segundo sistema com os correspondentes deslocamentos generalizados do primeiro”. Logo:

$$\sum F_A \cdot D_B = \sum F_B \cdot D_A \tag{10}$$

As forças são ditas generalizadas, pois envolvem cargas concentradas, cargas distribuídas e momentos aplicados. Os deslocamentos são ditos generalizados, pois podem envolver deslocamentos e rotações.

Um caso particular do Teorema de Betti é o Teorema de Maxwell. Este ocorre quando as soluções são constituídas de forças generalizadas unitárias isoladas.

Para forças generalizadas unitárias aplicadas, o Teorema de Maxwell tem o seguinte enunciado: “em uma estrutura linear elástica, o deslocamento generalizado no ponto j provocado por uma força generalizada unitária atuando no ponto i é igual ao deslocamento generalizado no ponto i provocado por uma força generalizada unitária atuando no ponto j $\left(\theta_J^A = \Delta_i^B\right)$.

Na versão para deslocamentos generalizados unitários, o enunciado fica assim: “em uma estrutura linear elástica, a força generalizada que atua no ponto j necessária para provocar um deslocamento generalizado unitário atuando no ponto i é igual à força generalizada no ponto i necessária para provocar um deslocamento generalizado unitária atuando no ponto j $\left(M_J^A = P_i^B\right)$.

2.4 ENERGIA DE DEFORMAÇÃO E ENERGIA COMPLEMENTAR

Para demonstrar os conceitos de energia, considera-se uma barra sujeita a uma força axial P que produz uma tensão $\sigma = P/A$ e deformação $\varepsilon = \delta/L$. O material da barra é considerado elástico, com curva tensão-deformação não-linear, mostrada na Fig. 2b. Então, a relação carga-deflexão (Fig. 2c) terá a mesma forma da curva tensão-deformação.

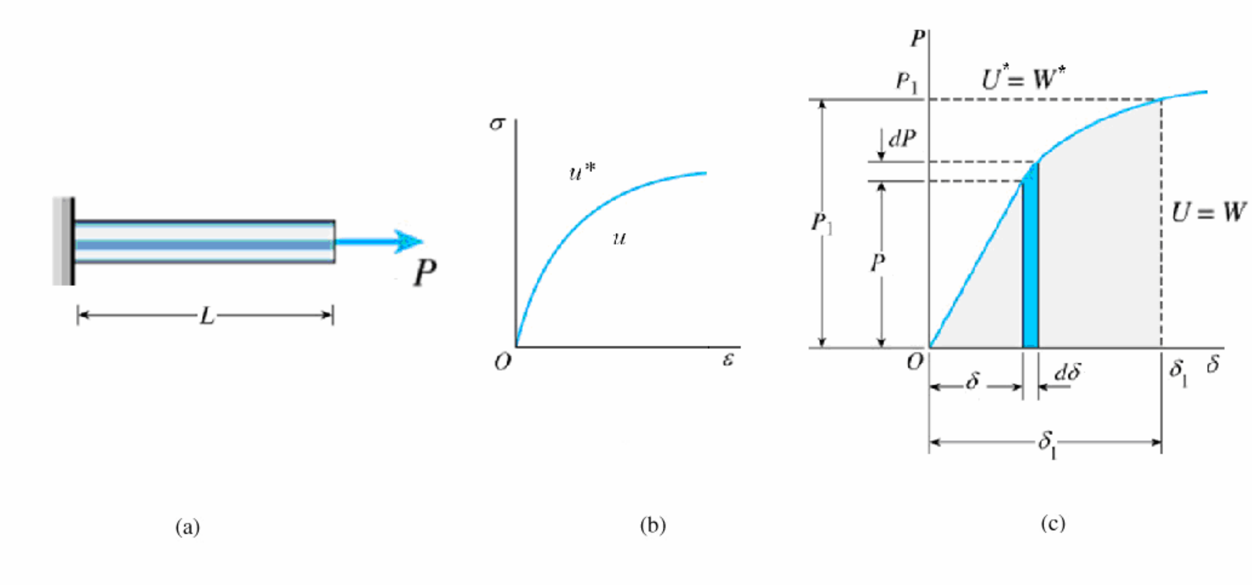

Figura 2 – Energia de deformação e energia complementar

O trabalho realizado pela carga P é:

$$W = \int_0^{\delta_1} P \, d\delta \tag{11}$$

e pode ser interpretado como sendo a área abaixo da curva carga-deflexão (Fig. 2c).

Como a barra se comporta elasticamente e as perdas de energia durante o carregamento e descarregamento são desprezadas (o sistema é conservativo), todo o trabalho realizado pela carga será armazenado na barra em forma de energia de deformação elástica, que poderá ser recuperado durante o descarregamento. Logo, a energia de deformação é igual ao trabalho:

$$U = W = \int_0^{\delta_1} P \, d\delta \quad \text{ou ainda} \quad U = \int u \, dV \tag{12}$$

onde a energia de deformação, u, por unidade de volume do material pode ser obtida pela expressão abaixo, representando a área sob a curva tensão-deformação na Fig. 2b.

$$u = \int_0^{\varepsilon_1} \sigma \, d\varepsilon \tag{13}$$

Outra formulação importante é o trabalho complementar, W^*, representado pela área entre a curva carga-deflexão não-linear e o eixo vertical (Fig. 2c).

$$W^* = \int_0^{P_1} \delta \, dP \tag{14}$$

Geometricamente, esse trabalho complementa W, pois ele completa o retângulo mostrado na Fig. 2c. A energia complementar, U^*, portanto, é igual ao trabalho complementar das cargas, tal que:

$$U^* = W^* = \int_0^{P_1} \delta \, dP \tag{15}$$

Similarmente:

$$u^* = \int_0^{\sigma_1} \varepsilon \, d\sigma \quad \text{e} \quad U^* = \int u^* \, dV \tag{16}$$

Os conceitos de energia de deformação também são aplicáveis a estruturas sujeitas a ouros tipos de carregamento, tais como torção e flexão.

Normalmente, há várias cargas atuando em uma estrutura e, por esta razão, as energias de deformação e complementar deverão ser obtidas mediante somatórios:

$$U = \sum \int P \, d\delta \quad \text{e} \quad U^* = \sum \int \delta \, dP \tag{17}$$

2.5 MÉTODO DA ENERGIA DE DEFORMAÇÃO

Para esta situação, pode-se imaginar, inicialmente, uma estrutura sob a ação de n cargas $P_1, P_2, \ldots, P_n$, cada qual com seu respectivo deslocamento $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$. A relação entre P e δ é não-linear e representam força e deslocamento correspondentes.

A energia de deformação da estrutura, U, corresponde, portanto, ao trabalho realizado por todas as cargas durante a sua aplicação, tal que cada uma das forças P_i será expressa em função de seu deslocamento, através da seguinte expressão:

$$U = \sum \int P \, d\delta \tag{18}$$

Logo, a expressão resultante para a energia de deformação será função do deslocamento δ.

Se um deslocamento δ_i sofrer um aumento de pequena quantidade, então também ocorre aumento da energia de deformação, dU, enquanto os demais deslocamentos são mentidos constantes. Neste caso:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial \delta_i} d\delta \tag{19}$$

A equação acima fornece as seguintes observações:

a) Quando o deslocamento δ_i sofre um aumento de pequena quantidade, $d\delta_i$, o trabalho realizado é pela força correspondente, P_i, e não qualquer das outras forças, visto que os outros deslocamentos não se alteram.

b) O trabalho realizado pela força correspondente também é igual ao aumento da energia de deformação na estrutura, isto é:

$$dW = dU = P_i \, d\delta_i \tag{20}$$

Juntando-se as duas equações para dU, tem-se:

$$P_i = \frac{\partial U}{\partial \delta_i} \quad (21)$$

A equação acima é chamada de *Primeiro Teorema de Castigliano* e indica que a derivada parcial da energia de deformação, em relação a qualquer deslocamento δ_i, é igual à força correspondente P_i .

O Primeiro Teorema de Castigliano é, portanto, um método de utilização da energia de deformação na análise de estruturas não-lineares, onde as incógnitas são os deslocamentos dos nós (também chamados de deslocabilidades) provocados por cada uma das cargas atuantes.

Assim, aplicando-se o Primeiro Teorema em relação a cada deslocamento da estrutura, obtém-se um conjunto de n equações de equilíbrio que podem ser resolvidas para cada deslocamento do nó:

$$P_1 = \frac{\partial U}{\partial D_1} \qquad P_2 = \frac{\partial U}{\partial D_2} \quad \ldots \quad P_n = \frac{\partial U}{\partial D_n} \quad (22)$$

Como pode ser observado, o método utiliza os deslocamentos como incógnitas e requer a solução das equações de equilíbrio sendo chamado, portanto, de *método dos deslocamentos*.

De forma simplificada, o método dos deslocamentos consiste em somar uma série de soluções básicas que satisfazem isoladamente as condições de compatibilidade, mas que não satisfazem as condições de equilíbrio da estrutura original, para na superposição restabelecer as condições de equilíbrio.

Portanto, quando uma estrutura não-linear estiver sendo analisada, será usado o termo “método dos deslocamentos”, enquanto que para o estudo de estruturas lineares a denominação utilizada será “método da rigidez”.

Considerando agora uma estrutura linear, obtém-se uma relação geral entre os coeficientes de rigidez e a energia de deformação:

$$S_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial D_j \partial D_i} \quad (23)$$

2.6 MÉTODO DA ENERGIA POTENCIAL

Como se sabe, a energia potencial é definida como o trabalho realizado por todas as forças atuantes em uma estrutura (internas e externas), quando ela é movida de sua configuração com carga para uma posição sem carregamento.

A energia potencial das forças internas é a energia de deformação, U, armazenada na estrutura com carga, pois se a mesma for deslocada de sua forma real para outra sem carregamento, a quantidade de trabalho recuperado será igual à energia de deformação. Já a energia potencial das forças externas é negativa, porque cada carga na estrutura executa trabalho negativo, caso retorne da posição final para a inicial, sendo dada por $-\sum_{i=1}^{n} P_i \, \delta_i$, onde n é o número de cargas. Logo, a energia potencial total é:

$$PE = U - \sum_{i=1}^{n} P_i \, D_i \quad (24)$$

uma vez que a energia de deformação é expressa em função dos deslocamentos desconhecidos.

Derivando em relação a um dos deslocamentos:

$$\frac{\partial PE}{\partial D_i} = \frac{\partial U}{\partial D_i} - P_i \tag{25}$$

Do Primeiro Teorema de Castigliano, $P_i = \partial U / \partial D_i$. Assim, conclui-se que:

$$\frac{\partial PE}{\partial D_i} = 0 \tag{26}$$

Aplicando-se a equação acima a cada um dos deslocamentos, é possível obter:

$$\frac{\partial PE}{\partial D_1} = 0 \qquad \frac{\partial PE}{\partial D_2} = 0 \quad \ldots \quad \frac{\partial PE}{\partial D_n} = 0 \tag{27}$$

As conclusões que podem ser tiradas, comparando essas expressões com as equações (25) e (22) são as seguintes:

a) Estas últimas são equações do equilíbrio no método dos deslocamentos.

b) Aplicar a energia potencial tem como resultado as equações obtidas quando se utiliza o método da energia de deformação.

c) As equações:

$$\frac{\partial PE}{\partial D_1} = 0 \qquad \frac{\partial PE}{\partial D_2} = 0 \quad \ldots \quad \frac{\partial PE}{\partial D_n} = 0$$

são uma representação do *princípio da energia potencial estacionária*, isto é, no caso de a energia potencial de uma estrutura (linear ou não-linear) ser expressa em função dos deslocamentos desconhecidos dos nós, a estrutura estará em equilíbrio quando estes forem tais que levem a energia potencial total atingir um valor estacionário.

d) Se a estrutura está em equilíbrio estável, então a energia potencial total terá um valor mínimo (*princípio da energia potencial mínima*).

e) Se a estrutura é instável, então a energia potencial total terá um valor máximo ou neutro.

2.7 MÉTODO DE RAYLEIGH-RITZ

Conforme visto, o método da energia potencial é utilizado para encontrar soluções aproximadas. Quando se usa esse método, as expressões para a energia de deformação, U , são simples, uma vez que a quantidade de deslocamentos desconhecidos é pequena. Entretanto, quando uma estrutura apresenta um número de graus de liberdade muito grande, o cálculo da energia potencial é feito aproximando-se a sua forma através de uma função que contenha um ou mais parâmetros de deslocamento indeterminados.

Sabendo-se ainda que, no princípio da energia potencial estacionária, os deslocamentos devem ser tais que dêem à energia potencial um valor estacionário, então, é possível usar as derivadas parciais da energia potencial em relação a cada um dos parâmetros de deslocamento e igualar estas a zero. Como resultado, tem-se um conjunto de equações que é proporcional ao número de parâmetros desconhecidos. Resolvendo as equações para esses parâmetros determina-se a forma fletida que se admitiu para a estrutura e calculam-se os valores para as reações e tensões resultantes.

Normalmente, os resultados encontrados são menos preciso que os próprios deslocamentos, uma vez que são obtidos através da diferenciação de funções deslocamentos. Assim, para obter melhores resultados, deve-se escolher a função que seja a mais próxima da verdadeira forma, de modo a satisfazer as condições de contorno da estrutura. Similarmente, quanto maior for o número de parâmetros de deslocamento para definir a aproximação, mais precisa será a forma real da estrutura.

Esse método de obtenção de aproximações na solução de problemas de equações diferenciais denomina-se Método de Rayleigh-Ritz, podendo ser aplicado em estruturas lineares e não-lineares. Também é bastante empregado para o método de elementos finitos, onde a estrutura é divida em inúmeros pequenos elementos, tal que as funções deslocamentos são usadas para representá-los.

As aplicações do Método de Rayleigh-Ritz em problemas de flambagem e vibração são feitas de forma similar, recaindo-se em um problema de autovalor.

2.8 TEOREMA DE CROTTI-ENGESSER

Para ilustrar o teorema, considera-se inicialmente uma estrutura não-linear, sujeita a n cargas, $P_1, P_2, \ldots, P_n$, que provocam os respectivos deslocamentos $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$. A energia complementar será calculada através da equação:

$$U^* = \sum \int \delta \, dP \tag{28}$$

Supondo que uma carga sofra um pequeno aumento, dP_i, enquanto as outras permanecem constantes, a energia complementar também terá um aumento de:

$$dU^* = \frac{\partial U^*}{\partial P_i} dP_i \tag{29}$$

Outro meio de se obter uma expressão para dU^* é considerar o trabalho complementar das cargas, quando a força P_i sofre um aumento dP_i. Esse trabalho é o mesmo que o aumento dU^* na energia complementar da estrutura, isto é:

$$dU^* = \delta_i \, dP_i \tag{30}$$

Neste caso, a única carga que realiza trabalho complementar é P_i, pois as outras forças não sofreram alteração.

Igualando as expressões, obtém-se outra equação que representa o Teorema de Crotti-Engesser:

$$\delta_i = \frac{\partial U^*}{\partial P_i} \tag{31}$$

É interessante observar que este teorema é muito parecido com o Primeiro Teorema de Castigliano, como mostra as expressões a seguir:

- Teorema de Crotti-Engesser: $\delta_i = \dfrac{\partial U^*}{\partial P_i}$
- Primeiro Teorema de Castigliano: $P_i = \dfrac{\partial U}{\partial \delta_i}$

Como se pode concluir, enquanto a energia de deformação, definida no Primeiro Teorema de Castigliano, é expressa em função dos deslocamentos para se obter as cargas correspondentes; a energia complementar, definida no Teorema de Crotti-Engesser, é expressa em função das cargas para se obter os deslocamentos correspondentes.

2.9 MÉTODO DAS FORÇAS

Para o estudo do método das forças, são aplicados os conceitos de energia complementar e o Teorema de Crotti-Engesser.

De forma simplificada, o método das forças consiste em somar uma série de soluções básicas que satisfazem as condições de equilíbrio, mas que não satisfazem as condições de compatibilidade da estrutura original, para na superposição restabelecer as condições de compatibilidade.

A estrutura utilizada para superposição de soluções básicas é uma estrutura isostática auxiliar, chamada de Sistema Principal, obtida a partir da estrutura original pela eliminação de vínculos. As tensões resultantes e reações associadas aos vínculos liberados são as incógnitas do problema e são denominados hiperestáticos.

Para melhor compreensão do método, pode-se imaginar, inicialmente, uma estrutura não-linear com n graus de indeterminação. A partir da escolha dos hiperestáticos $X_1, X_2, \ldots, X_n$, eliminam-se os vínculos da estrutura original, obtendo uma estrutura isostática auxiliar. Neste caso, que o sistema principal está sujeito tanto às cargas reais quanto aos hiperestáticos. A solução do problema pelo Método das Forças recai, portanto, em encontrar os valores $X_1, X_2, \ldots, X_n$ que fazem com que as condições de compatibilidade sejam restabelecidas.

Indicando $D_1, D_2, \ldots, D_n$ como os deslocamentos da estrutura correspondentes aos hiperestáticos $X_1, X_2, \ldots, X_n$ então, pelo Teorema de Crotti-Engesser, têm-se as seguintes expressões:

$$D_1 = \frac{\partial U^*}{\partial X_1} \qquad D_2 = \frac{\partial U^*}{\partial X_2} \quad \ldots \quad D_n = \frac{\partial U^*}{\partial X_n} \tag{32}$$

onde a energia complementar, U^*, é função das cargas e dos hiperestáticos.

Como pode ser observado, o método utiliza hiperestáticos como incógnitas e requer a solução das equações de compatibilidade sendo chamado, portanto, de *método das forças*.

O método das forças é similar ao método da flexibilidade. A única diferença reside no fato de que este último é utilizado na análise de estruturas lineares. Portanto, quando uma estrutura não-linear estiver sendo analisada, será usado o termo "método das forças", enquanto que para o estudo de estruturas lineares a denominação utilizada será "método da flexibilidade".

É importante observar também que o método dos deslocamentos é análogo ao método das forças (Tabela 1), ao passo que em ambos os métodos a solução da estrutura considera as condições de equilíbrio, as condições de compatibilidade entre deslocamentos, e condições impostas pelas leis constitutivas dos materiais.

Quando não há deslocamentos na estrutura original, as equações ficam:

$$\frac{\partial U^*}{\partial X_1} = 0 \qquad \frac{\partial U^*}{\partial X_2} = 0 \quad \ldots \quad \frac{\partial U^*}{\partial X_n} = 0 \tag{33}$$

Estas equações representam as condições de um valor estacionário da energia complementar. No caso de estruturas em equilíbrio estável, o valor estacionário é mínimo e, por isso, representam o *princípio da energia complementar mínima*. Este princípio afirma que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ têm valores que tornam mínima a energia, desde que não haja deslocamentos correspondentes aos hiperestáticos da estrutura original.

MÉTODO DAS FORÇAS	MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS
Incógnita: hiperestáticos.	Incógnita: deslocabilidades.
Estrutura utilizada na solução básica: Sistema Principal (estrutura isostática, obtida a partir da eliminação de vínculos da estrutura original).	Estrutura utilizada na solução básica: Sistema Hipergeométrico (estrutura obtida a partir da adição de vínculos para impedir as deslocabilidades).
Condições da estrutura original satisfeitas: condições de equilíbrio.	Condições da estrutura original satisfeitas: condições de compatibilidade.
A energia complementar é expressa em função das cargas e hiperestáticos.	A energia de deformação é expressa em função dos deslocamentos desconhecidos dos nós.
Utiliza-se o Teorema de Crotti-Engesser para obter as equações de compatibilidade.	Utiliza-se o Primeiro Teorema de Castigliano para obter as equações de equilíbrio.
É utilizado para estruturas não-lineares.	É utilizado para estruturas não-lineares.

Tabela 1 – Diferença entre métodos das forças e método dos deslocamentos.

2.10 SEGUNDO TEOREMA DE CASTIGLIANO

Diferentemente dos estudos anteriores, voltados apenas para comportamento de estruturas não-lineares, no desenvolvimento deste teorema volta-se a atenção para as estruturas lineares, tal que a energia complementar, U^*, e a energia de deformação, U, da estrutura são iguais.

Admitindo assim uma estrutura linear sujeita às cargas $P_1, P_2, \ldots, P_n$ e seus respectivos deslocamentos $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$, então se pode substituir U^* por U no Teorema de Crotti-Engesser e obter:

$$\delta_i = \frac{\partial U}{\partial P_i} \tag{34}$$

A equação acima é chamada de Segundo Teorema de Castigliano e indica que a derivada parcial da energia de deformação, em relação a qualquer carga P_i é igual ao deslocamento correspondente δ_i.

Para entender como funciona a aplicação do teorema, supõe-se uma viga engastada, bi-apoiada, sujeita à carga P e momento M_o (Figura 3).

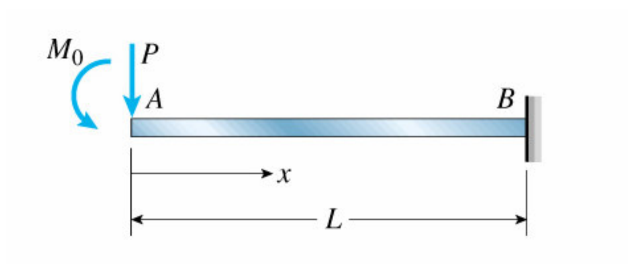

Figura 3 – Ilustração do Segundo Teorema de Castigliano.

A energia de deformação é dada por:

$$U = \int \frac{M^2 dx}{2EI} = \frac{1}{2EI}\int_0^L \left(-Px - M_o\right)^2 dx = \frac{P^2L^3}{6EI} + \frac{PM_oL^2}{2EI} + \frac{M_o^2 L}{2EI} \tag{35}$$

Para encontrar a deformada na extremidade livre da viga e o ângulo de rotação, aplica-se o Segundo Teorema de Castigliano e toma-se a derivada parcial de U em relação à P. Logo:

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{M_oL^2}{2EI} \quad \text{e} \quad \theta = \frac{\partial U}{\partial M_o} = \frac{PL^2}{2EI} + \frac{M_oL}{EI} \tag{36}$$

Esse teorema só pode ser aplicado no cálculo de deslocamentos que correspondam às cargas atuantes na estrutura. Para calcular o deslocamento em uma região sem aplicação de carga, será necessário colocar uma carga fictícia na estrutura, equivalente ao deslocamento desejado. Com isso, faz-se o cálculo do deslocamento usando o Segundo Teorema de Castigliano; o resultado mostra que esse valor é expresso em relação às reais e fictícias. Por fim, igualando-se a carga fictícia a zero na expressão final, obtém-se o deslocamento desejado devido às cargas reais.

2.11 ENERGIA DE DEFORMAÇÃO E MÉTODO DA FLEXIBILIDADE

Considerando agora uma estrutura linear para o caso do método das forças, a aplicação do Segundo Teorema de Castigliano leva às expressões:

$$D_1 = \frac{\partial U}{\partial X_1} \qquad D_2 = \frac{\partial U}{\partial X_2} \quad \dots \quad D_n = \frac{\partial U}{\partial X_n} \tag{37}$$

Pode-se então observar o seguinte:

a) As expressões são de compatibilidade do método da flexibilidade.
b) Essas equações são um caso particular das equações de compatibilidade do método das forças, para estruturas lineares.

Se os hiperestáticos não realizam deslocamento, então:

$$\frac{\partial U}{\partial X_1} = 0 \qquad \frac{\partial U}{\partial X_2} = 0 \quad \dots \quad \frac{\partial U}{\partial X_n} = 0 \tag{38}$$

Estas equações representam as condições de um valor estacionário da energia de deformação. No caso de estruturas em equilíbrio estável, o valor estacionário é mínimo e, por isso, representa o *princípio da energia de deformação mínima*. Este princípio afirma que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ têm valores que tornam mínima a energia de deformação, se não houver deslocamentos correspondentes aos hiperestáticos da estrutura original.

3. CONCLUSÕES

O trabalho apresentado baseou-se na importância dos conceitos de energia de deformação e energia complementar, que formam a base de alguns métodos bastante eficientes na análise estrutural. Estes métodos podem ser aplicados para estruturas lineares e não-lineares, como é o caso do princípio do trabalho virtual e o método da carga unitária. Entretanto, os teoremas recíprocos, o método da flexibilidade e o método da rigidez baseiam-se no princípio da superposição e, por isso, aplicam-se somente a estruturas de comportamento linear.

Assim, mesmo com o crescente uso da tecnologia a favor de desenvolver essas teorias e conceitos cada vez mais precisos, ainda existe muita investigação a ser feita e estudada a cerca da concepção estrutural.

Já foi iniciado o estudo de problemas de autovalores e autovetores, no cálculo de freqüências e cargas críticas, com respectivos modos, usando o Método de Rayleigh-Ritz. Este assunto será aprofundado no próximo relatório.

4. AGRADECIMENTOS

Agradeço ao professor Raul Rosas e Silva pela orientação proporcionada durante todo o desenvolvimento da iniciação, e pela sua disposição em ajudar o trabalho a ficar mais enriquecedor e interessante.

5. REFERÊNCIAS

MARTHA, L. F. **Apostila de Métodos Básicos da Análise de Estruturas do Curso CIV 1127**. Rio de Janeiro: Depto. de Eng. Civil, PUC-Rio, 2005.

MASON, J. e SOUZA, J. M. de. **Métodos de Energia – com Aplicações a Problemas Elásticos**. Rio de Janeiro: Interciência Ltda., 1976, 157 p.

TIMOSHENKO, S. P. e GERE, J. M. **Mecânica dos sólidos, vol. 2**. 1ª ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1998.