ESTUDO DAS CURVAS AUTO-SIMILARES POR FLUXO DA CURVATURA

Aluno: Rafael Briquet
Orientador: Henri Anciaux

Introdução

Estudamos a evolução de algumas curvas em variedades riemannianas. O problema consiste em estudar uma família de curvas a dois parâmetros, um deles interpretado como tempo. No caso do fluxo da curvatura, a evolução da curva no tempo se dá de forma que ela se deforme em cada ponto de acordo com o seu vetor curvatura. Surgem então perguntas. Quais são as curvas no plano que evoluem por rotações? Por translações? E se estivermos no espaço hiperbólico? Em geral, buscamos achar curvas auto-similares.

Após caracterizar as curvas auto-similares no plano, procuramos estender as técnicas para outros espaços.

Desenvolvimento

No começo do trabalho estudamos o caso particular do plano, com o fluxo da curvatura, revendo alguns resultados em [2]. O interesse especial é quando o fluxo é um movimento rígido, isto é, encontrar curvas cuja evolução seja de um tipo familiar: homotetias, rotações e translações. No plano, o círculo é a curva que evolui homoteticamente e a chamada curva de yin-yang, por rotação. Utilizamos o programa Maple para visualizar algumas dessas curvas. Uma outra pergunta interessante é como se comporta a curva quando o tempo tende a infinito. Quando temos curvas fechadas, podemos estudar o comportamento da área definida pela curva, se a área converge para zero, a curva vai convergir para um ponto (caso do círculo).

Depois de caracterizar as curvas no plano, passamos ao fluxo binormal em R^3. Nessa parte, a referência principal foi o estudo apresentado em [4]. Pra chegar à equação desejada, que permitiu achar curvas auto-similares, seguimos dois caminhos: o mesmo processo do caso do plano, e também o seguido pelo autor, que faz considerações sobre simetria para chegar ao resultado.

Em [3], é apresentada um técnica para construção de superfícies lagrangeanas via curvas na 3-esfera e no espaço hiperbólico. O problema pode ser transferido para a esfera de duas dimensões e para um modelo do plano hiperbólico através de fibrações de Hopf. Na última etapa do trabalho, motivados por essa técnica, procuramos encontrar curvas auto-similares pelo fluxo da curvatura na 3-esfera, usando a fibração de Hopf para reduzir o problema a 2-esfera. Utilizamos novamente o programa Maple para visualizar as curvas na esfera.

Resultados

O trabalho desenvolvido foi um primeiro contato do aluno com problemas reais de pesquisa em geometria diferencial. Começando com um caso extremamente particular e já resolvido e posteriormente aplicando o conhecimento a novos problemas. Também foi fundamental para desenvolver a intuição geométrica e poder interpretar geometricamente certas equações diferenciais.

Pudemos, ao fim do projeto, caracterizar as curvas auto-similares em algumas importantes variedades riemannianas. O projeto também permitiu um primeiro contato com espaços importantes como modelos do espaço e plano hiperbólico, espaço anti de Sitter e outras estruturas fundamentais em matemática e física (em especial relatividade), garantindo uma maior compreensão da geometria diferencial e maturidade matemática.

Um aspecto interessante, que não abordamos nesse trabalho, é a interpretação física. Esse estudo tem uma interpretação física interessante, porém freqüentemente complicada. O fluxo binormal em R^3, por exemplo, se relaciona a problemas em teoria dos fluídos.

Estudamos apenas um caso particular, mas o estudo de objetos auto-similares tem diversas aplicações. Flocos de neve, fractais em geral e até linhas litorâneas são objetos auto-similares. Em telecomunicações, várias formas de transferência de dados se comportam estatisticamente de maneira auto-similar, bem como grandes redes de computadores.

Referências

1 – DO CARMO, M.P. **Differential geometry of curves and surfaces**. Upper Saddle River: Prentice-Hall, 1976.

2 – ANCIAUX, H. Mean curvature flow and self-similar submanifolds. Séminaire de théorie spectrale et géométrie, 2003.

3 – CASTRO, I.; CHEN B.-Y. Lagrangian surfaces in complex Euclidean plane via spherical and hyperbolic curves. Preprint, 2005.

4 – VEGA, L. Kink solutions of the binormal flow. Équations aux derives partielles, 2003.

5 – KÜHNEL, W. **Differential geometry**. American Mathematical Society, 2002.

6 – DO CARMO, M.P. **Geometria riemanniana**. 2. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1988.