CURVAS CLÁSSICAS PLANAS E APLICAÇÕES

Alunos: Paula Galvão Caldas, Eric Cardona
Orientador: Ricardo Sá Earp

Introdução

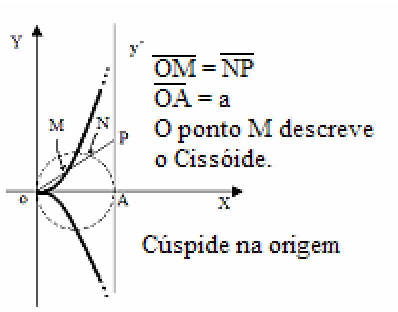
Foi feito um estudo sobre certas curvas planas que são baseadas em construções geométrico-cinemáticas. Fizemos uma breve incursão na Teoria do Cálculo Variacional visando entender as soluções dos problemas da *Braquistócrona* e *Tautócrona* (curva ciclóide). Também estudamos o conceito de *mapeamento harmônico* num exemplo em que a imagem do disco é o interior de um hipociclóide. Foi utilizado o programa MAPLE para o traçado, cálculo e análise geométrica.

Objetivos

Estudo da geometria de certas curvas planas clássicas com aplicações à Mecânica e à Teoria das Aplicações Harmônicas.

Curvas clássicas descritas geometricamente

Cissóide (VI AC, DIOCLES) :

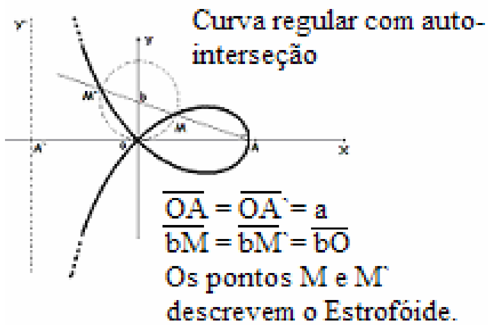


eq. paramétrica: $t \rightarrow [a\ \text{sen}^2(t), a\ \text{sen}^2(t)\tan(t)]$

$\pi/2 < t < \pi/2, \quad a > 0$

eq. cartesiana : $a\, y^2 = x\,(y^2 + x^2)$

Estrofóide (1645, ROBERVAL):



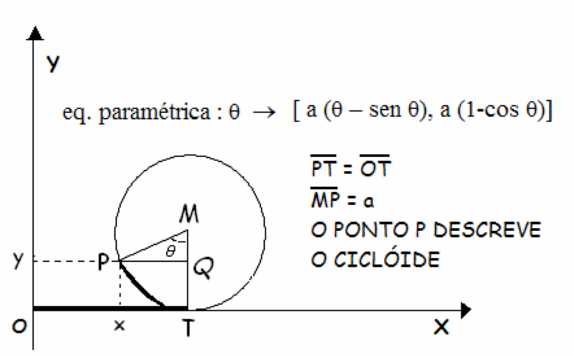
eq. paramétrica: $t \rightarrow [a\cos(2t), a\cos(2t)\tan(t)]$

$\pi/2 < t < \pi/2, \quad a > 0$

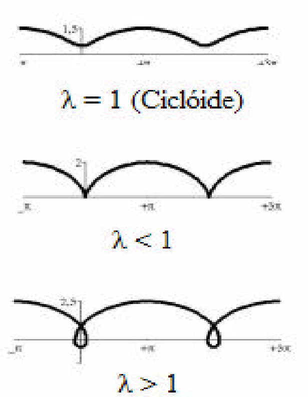
eq. cartesiana : $a\,(x^2 - y^2) = x\,(x^2 + y^2)$

Curvas cicloidais obtidas rolando-se um círculo sobre outra curva

Cinemática do Ciclóide:



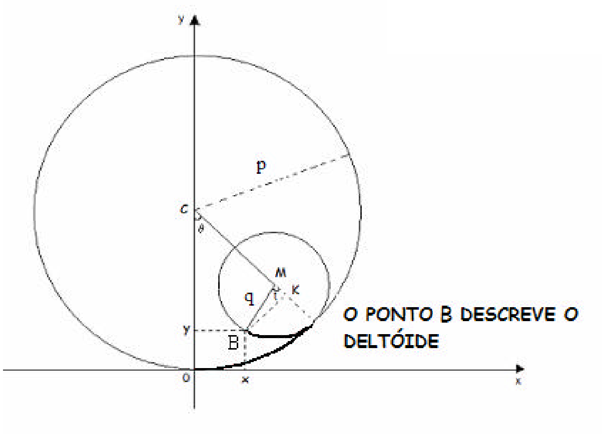
Família Ciclóide :



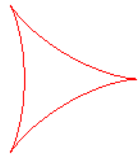
$t \rightarrow [a\,(t - \lambda\ \text{sen}\ t), a\,(1 - \lambda \cos t)]$

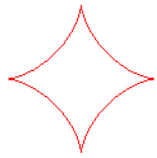
Cinemática do Deltóide :
(3 cúspides, p = 3, q= 1)
$z = a\,(2e^{it} + e^{-2it})$ (*)

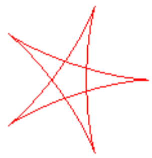
(*) notação complexa

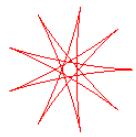


Cinemática da Família Hipociclóide:
(p = cúspides , q = voltas)
$z = a\,[((p/q) - 1)e^{it} + e^{-i((p/q)-1)t}]$ (*)


p=3, q=1
(Deltóide)


p=4, q=1
(Astróide)

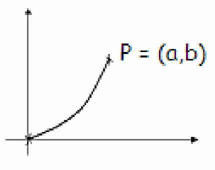

p=5, q=2


p=9, q=4

Aplicações na Mecânica clássica

<u>O Problema da Tautócrona</u>:

" Que curva é descrita por uma partícula deslizando levemente sobre ação apenas da gravidade atingindo o fundo no mesmo instante independentemente do ponto de partida?"



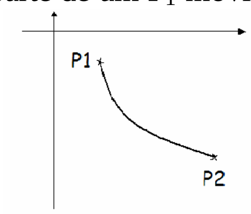
Modelo Físico-Matemático
Idéia : Conservação da Energia

Modelo Matemático
Idéia: Usar Transformada de Laplace e obter a curva y (Ciclóide).

$$T(y) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^b \frac{\sqrt{1+x'^2(y)}}{\sqrt{b-y}}\,dy = \sqrt{\frac{1+x'^2(y)}{2g}} * \frac{1}{\sqrt{b}} \quad \text{(Convolução)}$$

<u>O Problema da Braquistócrona</u> :

" Qual é a curva y ligando os pontos P_1 e P_2 realiza o menor tempo quando uma partícula parte de um P_1 movida somente pela ação da gravidade?"



Modelo Físico-Matemático
Idéia: Conservação da Energia

$$J[y] = \int_{x1}^{x2} \frac{\sqrt{1+y'(t)^2}}{y(x)}\,dx$$

Modelo Matemático
Idéia: Minimizar J[y], deduzir a equação de Euler-Lagrange do funcional e obter um Ciclóide.

<u>Aplicações Harmônicas</u> : Uma aplicação *u*(x,y) é dita *harmônica* quando seu *Laplaciano* denotado por $Du := u_{xx} + u_{yy}$, é igual a zero. Estudamos um exemplo de um *mapeamento harmônico* que leva o disco unitário aberto no interior de um hipociclóide.

Referências

1 - GRAY, A.;CORDEIRO,L.;FERNÁNDEZ, M. **Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces**.2.ed. Addison – Wesley – Iberoamericana,1995. 664p.

2 - HECK, A. **Introduction to Maple**. 3.ed. Springer , 2003. 828p.

3 – REVUE DU PALAS DE LA DÉCOUVERTE. **Courbes mathématiques**. Paris : Michel Demazure, n. 45, 1995.168p.