ESTIMATIVA DE CURVATURA EM CURVAS DISCRETAS

Aluno: Filipe Veras Bezerra da Silva
Orientador: Marcos Craizer

Introdução

Foi feito um estudo introdutório em geometria diferencial e computação gráfica. Em paralelo a esse estudo foram feitos debates e reuniões para clarificar e aprofundar conceitos da geometria projetiva. A utilização desses conhecimentos visa obter um software capaz de estimar a curvatura projetiva em curvas discretas.

Metodologia

O curso de geometria diferencial teve por objetivo introduzir conceitos básicos sobre curvas e superfícies, como por exemplo, curvatura, triedro de Frenet, curvatura de Gauss e algumas aplicações da geometria diferencial que serão úteis ao longo do trabalho ([2]).

Após concluir este aprendizado foi então iniciado um estudo de geometria projetiva ([1],[3]) em paralelo com o estudo de elementos matemáticos para a computação gráfica computação gráfica ([4]).

Durante o estudo de computação gráfica foram estudados a linguagem Java, o conceito da orientação por objetos, o ambiente Eclipse de desenvolvimento de software, assim como o uso da biblioteca gráfica OpenGL. A partir disso foram desenvolvidas técnicas para a modelagem de sólidos que utilizam representações matemáticas como curvas implícitas e funções paramétricas, além de métodos de criação de iluminação e meios de fazer com que o software desenvolvido interaja de forma simples e eficiente com o usuário.

Já o estudo paralelo de geometria projetiva, tema central do projeto, nos mostrou que ela nos mune com diversas armas para analisarmos situações onde as relações de incidência sejam de fundamental importância. Isso porque, ao contrário da geometria euclidiana plana, onde duas retas podem ter duas posições relativas (concorrentes ou paralelas), na geometria projetiva duas retas sempre têm um ponto em comum, mesmo que seja um ponto no infinito. A origem desse ponto de encontro está na própria construção do espaço projetivo, que é obtido por uma relação de equivalência entre os pontos em um espaço vetorial.

Essa equivalência entre dois pontos é muito simples. Dizemos que dois pontos são equivalentes se pertencem a uma mesma reta que passe pela origem, ou seja, se são múltiplos não nulos um do outro. Vem dessa relação a definição de que a dimensão de um espaço projetivo é sempre um menos a dimensão do espaço vetorial do qual ele é gerado.

Demonstra-se a partir dessas definições básica o fato de dois hiperplanos projetivos quaisquer terem sempre interseção não vazia [1].

Outra característica importante da geometria projetiva é o que o hiperplano que contem os pontos de interseção dos hiperplanos que seriam “euclidianamente” paralelos é tratado de forma igual a qualquer outro. Portanto, transformações projetivas, (que nada mais são do que isomorfismos lineares entre os espaços vetoriais geradores, que após a aplicação da transformação são projetivizados pela relação de equivalência descrita anteriormente) nos trazem novos modos de observar uma mesma situação já que, além de preservarem as relações de incidência (cruzamento de retas e o de certas retas passarem por certos pontos), elas são capazes de levar hiperplanos quaisquer no infinito e vice-versa. É importante notar o quanto essa ferramenta é importante. Aplicações tradicionais dela são os teoremas de Pappus e Desargues.

Além desses pontos foi trabalhado o conceito de dualidade de curvas projetivas. No caso do plano projetivo a dualidade permite associar a cada reta um ponto e cada ponto uma reta. Se tivermos, portanto, uma curva suave no plano projetivo podemos a cada ponto dessa curva associar uma reta, e sob certas hipótese podemos garantir a existência de uma outra curva suave que será o envelope dessas retas. Além disso, a dualidade, que também preserva as relações de incidência, nos permite enunciar, para cada teorema demonstrado um novo teorema, o teorema dual.

O ultimo aspecto estudado é a equivalência projetiva entre todas as seções cônicas, ou seja, por meio de transformações projetivas podemos transformar por exemplo um círculo em parábola, ou uma parábola em uma elipse.

Conclusões

O estudo teórico de aspectos fundamentais para a realização do trabalho como a geometria diferencial e a princípios matemáticos da computação gráfica trouxe novas idéias sobre o modo de obtenção dos objetivos finais da pesquisa.

Com o trabalho realizado verificamos resultados muito interessantes e importantes da geometria projetiva como os teoremas de Pappus e Desarques, além de compreendermos melhor a equivalência projetiva entre as seções cônicas e também o processo de dualidade de espaços projetivos.

Referências

[1] Audin, M. - Geometry. 1. ed. Berlim: Springer-Verlag, 2002.

[2] do Carmo, M. - Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies, Textos Universitários da SBM, 2005.

[3] Ovsienko, V. and Tabachnikov, S. – Projective differential geometry old and new: from Schwartzian derivative to cohomology of diffeomorphism groups, Cambridge University Press, 2005.

[4] Pesco, S., Tavares, G. e Lopes, H. – Notas de aula de Elementos matemáticos para Computação Gráfica.