SEMIÓTICA APLICADA

Aluno: Alan Conci Kubrusly
Orientador: Lorenzo J. Díaz

Introdução

Foi feito um estudo introdutório aos Sistemas Dinâmicos. Iniciou-se o projeto com o estudo da dinâmica em uma dimensão. Atenção especial foi dada aos exemplos mais clássicos, tais como a família de funções quadráticas, na qual foi usada a dinâmica simbólica. Um dos principais teoremas dessa etapa é o teorema de Sarkovskii. Estudaram-se, também, sistemas dinâmicos em maiores dimensões. Foram vistos, entre outros, exemplos clássicos como a Ferradura, o Solenóide e transformações no Torus. Encerrou-se o projeto com o estudo das frações contínuas. A família de funções quadráticas e expansão em frações continuas serão exploradas a seguir.

Família de Funções Quadráticas e o Shift

Uma importante família de funções é a das funções quadráticas, $F_\mu(x)=\mu x(1-x)$ onde o parâmetro μ é variável. Esta função apresenta algumas características interessantes para diferentes valores de μ. Entre elas, temos que se $\mu>4$ existem dois pontos, p_0 e p_1, onde $F_\mu(x) = 1$, logo pode-se definir um intervalo $A_0 = (p_0, p_1)$, no qual $F_\mu(x) > 1$ e $F^n_\mu(x) \to -\infty$ quando $n \to \infty$ $\forall$ $x \in A_0$. Indutivamente definimos os conjuntos $A_n = \{x \in I \mid F^n_\mu(x) \in A_0\}$, onde $I = [0,1]$, i.e. A_n se consiste dois pontos que, em alguma iteração, saem de I. Podemos definir também dois intervalos $I_0 = [0, p_0]$ e $I_1 = [p_1,1]$, perceba que $I_0 \cup I_1 = I - A_0$. Define-se então o conjunto $\Lambda = I - \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right)$. O grande resultado é que se $\mu > 2+\sqrt{5}$ o conjunto Λ é um conjunto de Cantor, i.e. fechado, totalmente desconexo e perfeito.

Outra característica desta família de funções quando $\mu > 2+\sqrt{5}$ é que podemos usar a dinâmica simbólica para melhor analisá-lo. Para isso define-se o espaço das seqüências de 0s e 1s, Σ_2, e o shift $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$, tal que $\sigma(s_0s_1s_2s_3\ldots) = s_1s_2s_3s_4\ldots$, onde cada $s_i = 0$ ou 1. O itinerário, em F_μ, de um ponto é a seqüência $S(x) = s_0s_1s_2s_3\ldots$, onde $s_i = 0$ se $F^i_\mu(x) \in I_0$ e $s_i = 1$ se $F^i_\mu(x) \in I_1$. Se $\mu > 2+\sqrt{5}$ então $S: \Lambda \to \Sigma_2$ é um homeomorfismo e $S \circ F_\mu = \sigma \circ S$, dizemos então que F_μ e σ são topologicamente conjugados e, logo, tem dinâmicas equivalentes. Conclui-se, então, que se $\mu > 2+\sqrt{5}$, F_μ herda propriedades do shift, entre elas: 2^n pontos periódicos de período n; o conjuntos dos pontos periódicos é denso em Λ; e existe uma órbita densa em Λ. Demonstrar tais propriedades sem o auxílio do shift seria muito mais trabalhoso. Vemos assim como o shift torna-se uma importante ferramenta quando se consegue construir um conjugado topológico. [1]

Frações Contínuas

Para todo número real existe uma, seqüência de números inteiros que o representa, de tal forma que temos a seguinte igualdade

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots}}}}$$
,

esta expressão é chamada de expansão em frações contínuas de x. Passaremos a escrever $x = a_0 + [a_1,a_2,a_3,...]$. Existe uma, e somente uma, seqüência de números inteiros que seja a expansão em frações contínuas de um dado número real. Se x for um número racional podemos obter sua expansão através do algoritmo da divisão, contudo se x for irracional necessitamos da Transformação de Gauss para obtê-la, $T: [0,1) \to [0,1)$. Esta é assim definida

$$T(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$
,

onde $\lfloor z \rfloor$ é a parte intera de z. Desse modo temos que se $x \in [0,1)$ então $a_i = \left\lfloor \frac{1}{T^{i-1}(X)} \right\rfloor$, i=1, caso $x \notin [0,1)$, usa-se a transformação em $y = x - a_0$, tal que $a_0 = \lfloor x \rfloor$

Existem várias propriedades interessantes da expansão em frações contínuas de um número. Dentre elas podemos citar o fato da expansão ser finita se e somente se x for um número racional. Outra característica é o fato da expansão ser periódica se e somente se x for raiz de um polinômio de coeficientes inteiros de grau dois, i.e. um número algébrico de grau dois. Daí temos o notável exemplo do número de ouro, raiz do polinômio $p(x) = x^2 - x - 1$, cujos termos de sua expansão são todos iguais a 1, i.e. $x=1 + [1,1,1,...]$. [2]

Referências

1 - DEVANEY, Robert L. **An Introduction to Chaotic Dynamical Systems**. 2.ed. Rio de Janeiro: Addison-Wesley Publishing Company, 1948.

2 - Jorge, Danielle de Rezende. **Frações contínuas: propriedades ergódicas e de aproxmações**. Orientador: Lorenzo J. Díaz, Rio de Janeiro: PUC-Rio, Departamento de Matemática, 2006.