

SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS PARA VIGAS EM MÍSULA

Aluna: Paula de Castro Sonnenfeld Vilela

Orientador: Luiz Fernando Martha

Introdução

A principal metodologia de análise de estruturas compostas por barras faz uma superposição de soluções cinematicamente determinadas para barras isoladas [1]. Todas essas soluções podem ser obtidas de *soluções fundamentais* para *momentos de engastamento perfeito* de barra isolada submetida a carregamentos externos e para *coeficientes de rigidez à rotação*, que são os momentos que devem atuar nas extremidades da barra para impor rotações, isoladamente, nas extremidades da barra. As soluções fundamentais para barras com seção transversal constante são conhecidas e encontradas em qualquer livro texto de análise de estruturas [1,2]. Entretanto, não existem soluções analíticas fechadas para momentos de engastamento perfeito e coeficientes de rigidez à rotação para barras com seção transversal variável (vigas em mísula).

Objetivos

Este projeto de Iniciação Científica apresenta uma metodologia para determinação dessas soluções fundamentais para o comportamento transversal de flexão de barras que têm seção transversal com altura variando linearmente (mísula reta). O método utilizado para tal é o da Analogia da Viga Conjugada, também conhecida como Processo de Mohr [2]. Nesse contexto, se considera que os deslocamentos são pequenos e que o material tem um comportamento elástico-linear, com módulo de elasticidade, E , constante.

Metodologia

Os procedimentos para se analisar uma barra pela Analogia da Viga Conjugada são exemplificados para a determinação de coeficientes de rigidez à rotação da extremidade inicial de uma barra biengastada, que são os momentos M_A e M_B que devem atuar nas extremidades da barra para equilibrá-la quando uma rotação $\mathbf{q}_A = \mathbf{r}$ é imposta, tal como ilustra a Figura 1.

A metodologia segue a seguinte seqüência de procedimentos: (a) conversão de restrições de apoio da viga real para a viga conjugada; (b) determinação do diagrama de momentos fletores, $M(x)$, da viga real parametrizado pelos valores de M_A e M_B ; (c) determinação do carregamento na viga conjugada, $q^C(x) = M(x)/EI(x)$, onde $I(x)$ é o momento de inércia da seção transversal variável ao longo do comprimento da barra; e (d) imposição de condições de equilíbrio da viga conjugada, que equivale a impor condições de compatibilidade da viga real. A Figura 1 mostra o sistema de duas equações de equilíbrio na viga conjugada, $\mathbf{\hat{a}}F_y = 0$ e $\mathbf{\hat{a}}M_A = 0$.

Para explicitar os valores de M_A e M_B neste sistema de equações, é conveniente decompor o diagrama de momentos fletores da Figura 1 em duas parcelas lineares, uma dependente só de M_A e outra dependente só de M_B : $M(x) = M_A \cdot (x/l - 1) + M_B \cdot (x/l)$. Substituindo esta expressão nas equações $\mathbf{\hat{a}}F_y = 0$ e $\mathbf{\hat{a}}M_A = 0$ resulta em:

$$\left(\int_0^l \frac{(x/l) - 1}{EI(x)} dx \right) \cdot M_A + \left(\int_0^l \frac{x/l}{EI(x)} dx \right) \cdot M_B + \mathbf{r} = 0 \quad \left(\int_0^l \frac{(x^2/l) - x}{EI(x)} dx \right) \cdot M_A + \left(\int_0^l \frac{x^2/l}{EI(x)} dx \right) \cdot M_B = 0.$$

A solução do sistema de equações formado por estas duas equações leva aos valores de M_A e M_B . Dessa forma, chega-se aos valores dos coeficientes de rigidez à rotação desejados.

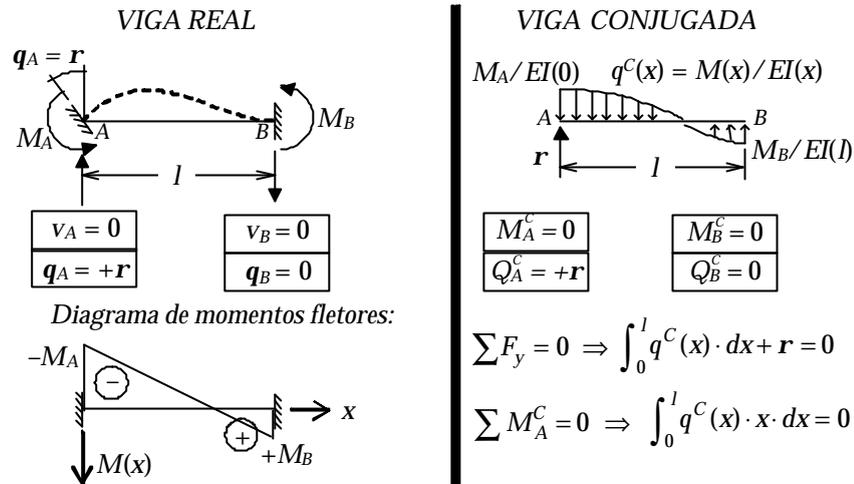


Figura 1 – Cálculo de coeficientes de rigidez à rotação de barra biengastada.

Observa-se que a metodologia apresentada resulta em integrais cujos integrandos correspondem a uma divisão de polinômios, que no caso geral não tem solução analítica fechada. Neste trabalho, essas integrais são resolvidas numericamente através de uma integração de Gauss implementada adaptativamente para obter uma precisão numérica adequada. Utiliza-se uma função de interpolação Lagrangeana cúbica para descrever a variação do momento de inércia da seção transversal em x . Como o momento de inércia varia cúbicamente com a altura da seção transversal, isso corresponde ao caso de mísula reta.

Para o cálculo de momentos de engastamento de barras isoladas, considera-se como caso mais geral um carregamento que varia linearmente ao longo do vão da barra. Utilizando superposição de efeitos, calcula-se o momento fletor devido à carga distribuída na viga biapoiada, $M_q(x)$, que é adicionado aos momentos provocados por M_A e M_B . Com isso tem-se a expressão para o carregamento na viga conjugada, $q^C(x) = [M_A \cdot (x/l - 1) + M_B \cdot (x/l) + M_q(x)] / EI(x)$. Utilizando as duas expressões de equilíbrio da viga conjugada, $\sum F_y = 0$ e $\sum M_A = 0$, chega-se a um sistema com duas equações análogas às duas equações encontradas anteriormente, cuja solução resulta nos valores desejados para os momentos de engastamento M_A e M_B .

Conclusões

A metodologia apresentada mostra que é possível resolver numericamente de uma maneira muito eficiente as soluções fundamentais para coeficientes de rigidez à rotação e momentos de engastamento para barras isoladas. Esta metodologia está sendo incorporada ao programa Ftool (<http://www.tecgraf.puc-rio.br/ftool>).

Referências

1. - White, R.N., Gergely, P. e Sexsmith, R.G. **Structural Engineering – Combined Edition – Vol. 1: Introduction to Design Concepts and Analysis – Vol. 2: Indeterminate Structures**, John Wiley & Sons, New York, 1976.
2. - Süsskind, J.C. **Curso de Análise Estrutural – Vol. 2: Deformações em Estruturas e Método das Forças – Vol. 3: Método das Deformações e Processo de Cross**, Editora Globo, Porto Alegre, 1977.