Pontifícia Universidade Católica
do Rio de Janeiro

Thomas Lewiner

Construção de funções de Morse discretas

Das hiperflorestas até complexos celulares

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós–graduação em Matemática Aplicada do Departamento de Matemática da PUC–Rio

Orientador : Prof. Hélio Côrtes Vieira Lopes
Co–Orientador: Prof. Geovan Tavares dos Santos

Rio de Janeiro
Julho de 2002

Pontifícia Universidade Católica
do Rio de Janeiro

Thomas Lewiner

Construção de funções de Morse discretas

Das hiperflorestas até complexos celulares

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós–graduação em Matemática Aplicada do Departamento de Matemática do Centro Técnico Científico da PUC–Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Hélio Côrtes Vieira Lopes
Orientador
Departamento de Matemática — PUC–Rio

Prof. Geovan Tavares dos Santos
Co–Orientador
Departamento de Matemática — PUC–Rio

Prof. Ney Augusto Dumont
Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico — PUC–Rio

Rio de Janeiro, 10 de Julho de 2002

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Thomas Lewiner

Graduou–se em Engenharia na Ecole Polytechnique (Paris, França), cursando Álgebra e Informática, assim como Física Teórica. Especializou–se na Ecole Supérieure des Télécommunications (Paris, França) em Processamento de Sinais de Voz e Imagens, assim como Organização e Planejamento. Trabalhou junto com a empresa Inventel em sistemas de telecomunicações sem fil baseados na tecnologia BlueTooth. Desenvolveu junto com os seus orientadores durante o Mestrado ferramentas de topologia computacional.

Ficha Catalográfica

Lewiner, Thomas

Construção de funções de Morse discretas / Thomas Lewiner; orientador: Hélio Côrtes Vieira Lopes; co–orientador: Geovan Tavares dos Santos. — Rio de Janeiro : PUC–Rio, Departamento de Matemática, 2002.

v., 13 f: il. ; 29,7 cm

1. Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática.

Inclui referências bibliográficas.

1. Matemática – Tese. 2. Teoria de Morse. 3. Teoria de Forman. 4. Topologia Computacional. 5. Geometria Computacional. 6. Modelagem Geométrica. 7. Matemática Discreta. I. Lopes, Hélio Côrtes Vieira. II. Santos, Geovan Tavares dos. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. IV. Título.

CDD: 510

Agradecimentos

Aos meus orientadores Professores Hélio Lopes e Geovan Tavares pelo apoio, simpatia de sempre, e incentivo para a realização deste trabalho

Ao CNPq e à PUC–Rio, pelos auxílios concedidos, sem os quais este trabalho não poderia ter sido realizado.

Às minhas avós, que sofreram o mais pela saudade devida a minha expatriação. Aos meus pais, irmãs e família.

Aos meus colegas da PUC–Rio, quem me fizeram adorar esse lugar.

Aos professores Marcos da Silvera, Jean–Marie Nicolas e Anne Germa que me ofereceram a oportunidade desta cooperação.

Ao pessoal do departamento de Matemática para a ajuda de todos os dias, em particular à Ana Cristina, Creuza e ao Sinesio.

Resumo

Lewiner, Thomas; Lopes, Hélio Côrtes Vieira; Santos, Geovan Tavares dos. **Construção de funções de Morse discretas**. Rio de Janeiro, 2002. 13p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

A teoria de Morse é considerada uma ferramenta matemática importante em aplicações nas áreas de topologia computacional, computação gráfica e modelagem geométrica. Ela foi inicialmente formulada para variedades diferenciáveis. Recentemente, Robin Forman desenvolveu uma versão dessa teoria para estruturas discretas, tais como complexos celulares. E isso permitiu que ela pudesse ser aplicada a outros tipos interessantes de objetos, em particular para malhas.

Uma vez que uma função de Morse é definida em uma variedade, informações sobre sua topologia podem ser deduzidas através de seus elementos críticos. O objetivo desse trabalho é apresentar um algoritmo para definir uma função de Morse discreta ótima para um complexo celular, onde obter o ótimo significa construir uma função que possui o menor número possível de elementos críticos. Aqui foi provado que esse problema é MAX–SNP difícil. Entretanto, também será proposto um algoritmo linear que, para o caso de variedades de dimensão 2, é sempre ótimo.

Também foram provados vários resultados sobre a própria estrutura das funções de Morse discretas. Em particular, uma representação equivalente por hiperflorestas é apresentada. E através dessa representação, foi desenvolvido um algoritmo para construção de funções de Morse discretas em complexos celulares com dimensão arbitrária. Esse algoritmo é quadrático no tempo e, apesar de não se poder garantir o resultado ótimo, dá respostas ótimas na maioria dos casos práticos.

Palavras–chave

Teoria de Morse. Teoria de Forman. Topologia Computacional. Geometria Computacional. Modelagem Geométrica. Matemática Discreta.

Abstract

Lewiner, Thomas; Lopes, Hélio Côrtes Vieira; Santos, Geovan Tavares dos. **Constructing discrete Morse functions**. Rio de Janeiro, 2002. 13p. MsC Thesis — Department of Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Morse theory has been considered a powerful tool in its applications to computational topology, computer graphics and geometric modeling. It was originally formulated for smooth manifolds. Recently, Robin Forman formulated a version of this theory for discrete structures such as cell complexes. It opens up several categories of interesting objects (particularly meshes) to applications of Morse theory.

Once a Morse function has been defined on a manifold, then information about its topology can be deduced from its critical elements. The purpose of this work is to design an algorithm to define optimal discrete Morse functions on general cell complex, where optimality entails having the least number of critical elements. This problem is proven here to be MAX–SNP hard. However, we provide a linear algorithm that, for the case of 2–manifolds, always reaches optimality.

Moreover, we proved various results on the structure of a discrete Morse function. In particular, we provide an equivalent representation by hyperforests. From this point of view, we designed a construction of discrete Morse functions for general cell complexes of arbitrary finite dimension. The resulting algorithm is quadratic in time and, although not guaranteed to be optimal, gives optimal answers in most of the practical cases.

Keywords

Morse Theory. Forman Theory. Computational Topology. Computational Geometry. Solid Modeling. Discrete Mathematics.

Sumário

1 Conclusão e trabalhos futuros **11**

Referências Bibliográficas **12**

A Primeiro Apêndice **13**

Lista de figuras

Lista de tabelas

Un abîme effrayant, une profusion de questions de toutes sortes où ma responsabilité était en jeu se présentaient à moi. Et la plus importante: qu'est–ce qui doit remplacer l'objet manquant? Le danger d'un art ornemental m'apparaissait clairement, la morte existence illusoire des formes stylisées ne pouvait que me rebuter.
C'est seulement après de nombreuses années d'un travail patient, d'une réflexion intense, d'essais nombreux et prudents où je développais toujours plus la capacité de vivre purement, abstraitement les formes picturales et de m'absorber toujours plus profondément dans ces profondeurs insondables, que j'arrivais à ces formes picturales avec lesquelles je travaille aujourd'hui et qui, comme je l'espère et le veux, se développeront bien plus encore.
Il a fallu beaucoup de temps avant que cette question: 'qu'est ce qui doit remplacer l'objet ?' trouve en moi une véritable réponse. Souvent je me retourne vers mon passé et je suis desespéré de voir combien de temps il m'a fallu pour arriver à cette solution.

Wassily Kandinsky, *Regards sur le passé.*

1
Conclusão e trabalhos futuros

Este trabalho foi focado na teoria discreta de Morse de Forman. Analisamos os elementos básicos desta teoria, e provamos a estrutura em camadas das funções de Morse discretas. Representamos esta estrutura de camadas por uma coleção de hiperflorestas e demos uma caracterização completa das células críticas em termos de componentes regulares das hiperflorestas. Usamos esta análise para introduzir um esquema para construir funções de Morse discretas em complexos celulares finitos de dimensão arbitrária. Esta construção é quadrática no tempo no pior caso, e foi provada que ela é linear e ótima no caso das variedades de dimensão 2. Os resultados experimentais mostraram que o algoritmo deu um resultado ótimo na maioria dos casos. Isto abriu uma nova pergunta: quais são as condições sobre um complexo celular que asseguram que o algoritmo fornece uma função ótima.

Uma aplicação importante deste trabalho em computação gráfica estaria no campo da compressão geométrica. O algoritmo Grow&Fold de A. Szymczak e J. Rossignac (Szy00) poderia ser justificado e melhorado por nosso algoritmo com o objetivo de minimizar o número de "glue faces" a fim conseguir uma compressão mais eficiente. Esta proposta foi feita de maneira ótima para o caso de compressão de superfícies com alças em (Lop02).

Planejamos continuar este trabalho em três direções. Primeiramente, como mencionado acima, aplicar a teoria de Forman e a análise de nosso algoritmo para a compressão de malhas volumétricas em $\mathbb{R}^n, n \geq 3$. Tentaremos também aplicar a teoria de Morse discreta para resolver as singularidades que aparecem nas reconstruções de modelos. Finalmente, esperamos produzir um morphing topologicamente consistente utilizando o campo gradiente discreto de dois objetos com o mesmo tipo de homotopia.

Referências Bibliográficas

[Lop02] LOPES, H.; ROSSIGNAC, J.; SAFANOVA, A.; SZYMCZAK, A. ; TAVARES, G.. **Edgebreaker: a simple compression for surfaces with handles**. In: 7TH ACM SIGGRAPH SYMPOSIUM ON SOLID MODELING AND APPLICATION, 2002. 1

[Szy00] SZYMCZAK, A.; ROSSIGNAC, J.. **Grow & Fold: Compression of Tetrahedral Meshes**. In: SOLID MODELLING '99, 1999. to appear. 1

A
Primeiro Apêndice

O primeiro apêndice deve vir após as referências bibliográficas. Depois que você colocar a diretiva "\apendix", todos os "\chapter{}" vão gerar apêndices.